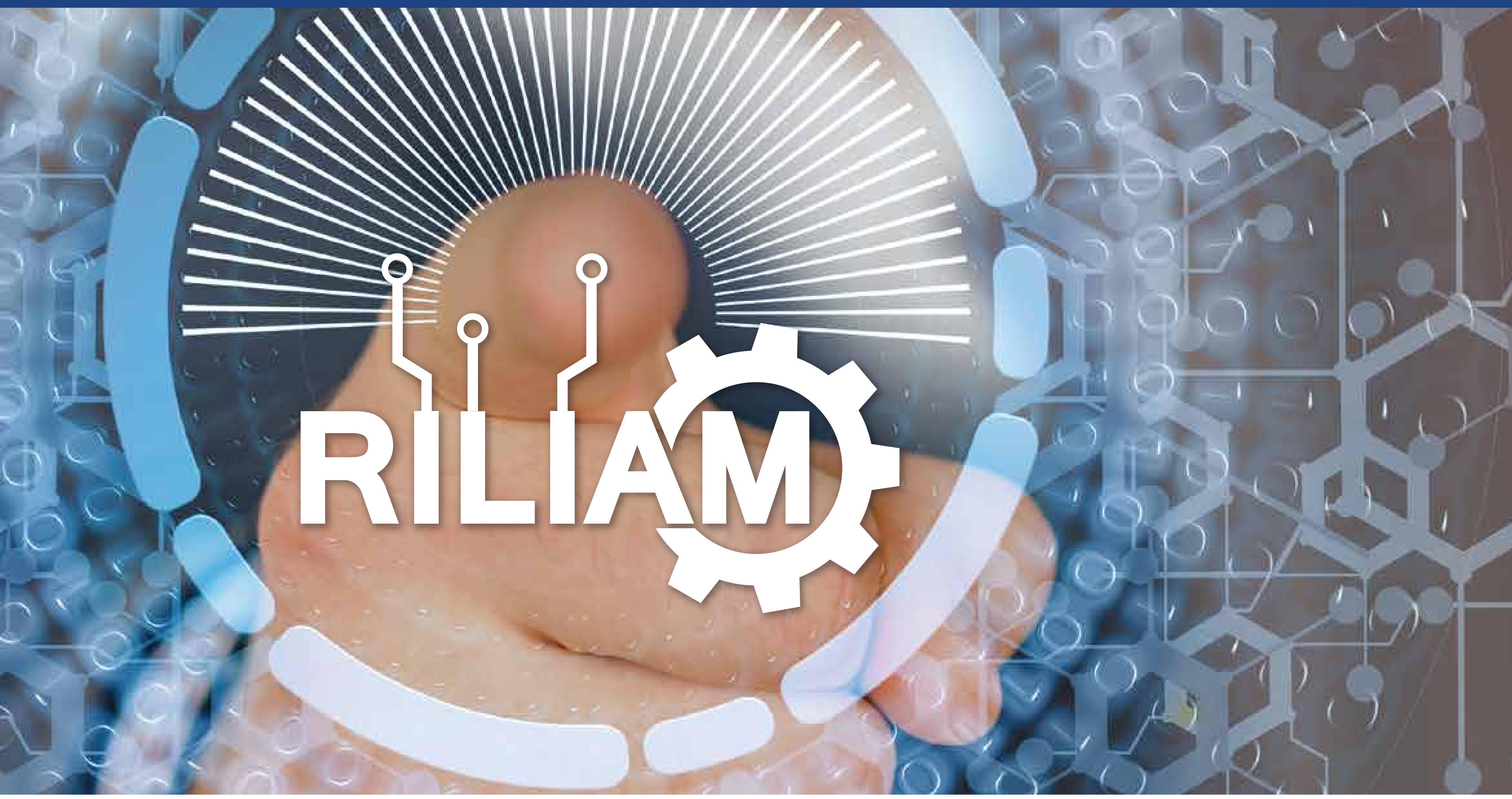
Interreg - IPA CBC
Magyarország – Szerbia

EURÓPAI UNIÓ

RILIAM

HUSRB/1602/41/0012

IPARI ROBOTOK IMPLEMENTÁCIÓJA



A projekt az Európai Unió
társfinanszírozásával valósul meg

Jó szomszédok
a közös
jövőért

Tartalom

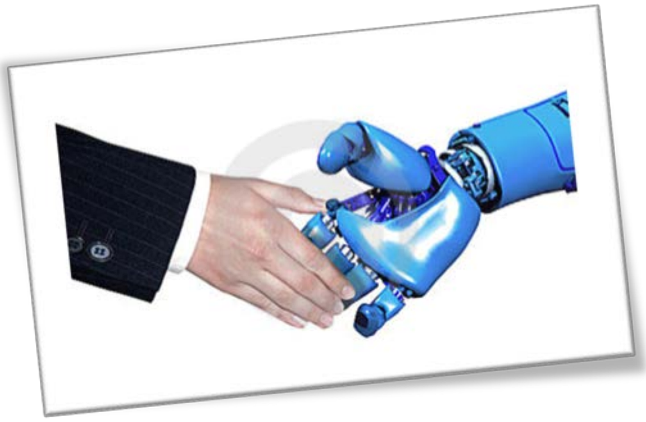
Előszó

A kézikönyv segítséget nyújt az ipari robotika elméleti és gyakorlati részét való elsajátításához. A robottechnika az automatika legfejlettebb alkalmazási területe. Az utóbbi időben pedig az intelligens rendszerek mind szélesebb körű alkalmazásával találkozhatunk. A kézikönyv az elméleti rész elsajátítását példák bemutatásával segíti. További példák a tanult anyag ismereteinek elmélyítését szolgálják. Több esetben, szakmai körökben elterjedt MATLAB számítógépes program alkalmazása is bemutatásra kerül. A kézikönyv elektronikus formában is nyilvánosság elé kerül, beszerezhető nyomtatott kiadványban és elérhető a RILIAM projekt honlapján.

A robotika három alaptörvénye

- *A robot may not injure a human being, or through inaction, allow a human being to come to harm.*
- *A robot must obey the orders given it by human beings except where such orders would conflict with the First Law.*
- *A robot must protect its own existence as long as such protection does not conflict with the First or Second Law.*

(I. Asimov: I, Robot)



1. FANUC ipari robotok

Több, mint 100 típusával a FANUC nyújtja a világon a robotok legnagyobb kínálatát. A FANUC rengeteg alkalmazási területet és iparágat lefedő gépeit könnyű üzemeltetni. Ezek a robotok az alkalmazásspecifikus kialakítások széles skálájának és az ésszerű beépíthetőségnek köszönhetően akár 2,3 t teherbírásig és 4,7 m legnagyobb karkinyúlásig teljes rugalmasságot kínálnak.

1956-os indulása óta, amikor Dr. Inaba Szejuemon, a vállalat alapítója az elsők között dolgozta ki a numerikus vezérlés (NC) koncepcióját, a FANUC folyamatosan a világ gyártási forradalmának élvonalában szerepel. Az 1950-es évek végén az egyetlen gép automatizálásával induló kezdetektől a rákövetkező évtizedek teljes gyártósorokat automatizáló megoldásaiig Dr. Inaba azzal indította el ezt az áttörést jelentő fejlődést, hogy feltalálta az első elektromos impulzust használó motort, amelyhez numerikus vezérlőt programozott, és ezt behelyezte egy szerszámgépbe. Dr. Inaba és csapata, akik folyamatosan arra törekedtek, hogy kiszélesítsék az automatizálás határait, növeljék a termelékenységet és a költségek csökkentése mellett egyre jobb termékeket állítsanak elő, ezt követően egy olyan robotot fejlesztettek ki, amely ugyanezeket az alapelveket alkalmazva tölti be a szerszámgépet. Dr. Inaba munkája hamarosan azt eredményezte, hogy a világ más gyártói és géptervező vállalatai szintén előnyt kovácsoltak ebből a technológiából, csökkenteni tudták költségeiket és növelni tudták termelékenységüket. Világvezető termékeivel pedig, mint például a ROBOCUT, a ROBODRILL és a ROBOSHOT, amelyek a 70-es – 80-as évek végén forradalmi változást jelentettek a gyártásban, a FANUC egyre szélesebb körű ipari alkalmazások és ügyfelek számára tudott optimalizált megoldásokat kínálni. Japánban a FANUC az első olyan vállalat lett, amely automatizált gyárat alakított ki és üzemeltetett NC- szerszámgépek és robotok használatával. A megalapítása eltelt 60 évnyi tapasztalatával, valamint a világszerte üzembe helyezett több mint 4 millió CNC-vezérlőjével és 550 000 robotjával a FANUC a világ vezető vállalata a gyártásautomatizálás terén. Csak egy dolog maradt ugyanaz: A FANUC továbbra is mélyen elkötelezett az iránt, hogy kiszélesítse az automatizálás határait, és segítsen ügyfeleinek gyártási folyamataik optimalizálásában.

SCARA robotok – magasabb termelékenyég

A sebesség és a pontosság magasabb szintjét kínáló FANUC SCARA robotok ideálisan alkalmasak összeszerelési, felszedő és lerakó (pick and place), vizsgáló és csomagoló alkalmazásokhoz. Igényeitől függően, a FANUC SCARA robotok 3 kg vagy 6 kg terhelhetőséggel kaphatók. Mindkét modell 360°-os mozgástérben működik, és talapzatra szerelt kialakításuknak köszönhetően csekély helyigényűek. Az integrált szolgáltatások megakadályozzák a megtörést.

A SCARA közkedvelt választás robotokkal történő kisebb összeszerelési alkalmazásokhoz A SCARA a Selective Compliance Articulated Robot Arm (szelektív feladatok elvégzésére kialakított artikulált – tagolt, csuklós – robotkar) kezdőbetűiből álló betűszó. Ez azt jelenti, hogy az X-Y tengelybe csukló(ka)t építenek, míg a Z-tengely merev. A SCARA-konfiguráció egyedi, és sokféle anyagkezelési művelethez alkalmas.

A SCARA konstrukciója az alapnál összeerősített két karból és az 1. és 2. kar keresztezéséből áll. A SCARA X-Y mozgásának vezérlésére a két független motor inverz kinematikát, valamint a J1 és J2 csuklóknál interpolációt alkalmaz. A 2. kar végén lévő végső X-Y hely a J1 szög, a J2 szög, valamint az 1. kar és a 2. kar hosszúságának függvénye.

A munkavégzés tere, illetve az a tér amelyet a robot fizikailag elérhet, kritikus szempont. Legyen szó SCARA-ról, Deltáról vagy hattengelyes robotokról, a különböző kapcsolatok hosszúságai és a csukló mozgásának korlátai fontos figyelembe veendő tényezők.

A SCARA robotok munkatere jellemzően henger alakú, különféle átmérőkkel és mélységekkel. Az 1. és 2. kar teljes hossza a kör átmérőjét, míg a Z távolság a henger mélységét határozza meg.

A SCARA munkatere a legtöbb alkalmazásban előre és oldal irányban korlátozott. Ha a robot hátából kábelek és pneumatikus tömlők nyúlnak ki, akkor lehetséges, hogy a hátsó tér nem használható. Egyes SCARA robotok azonban opcionális alsó kimenetekkel kaphatók – lehetővé téve a robot mögötti munkát.

A legtöbb alkalmazásban a robotok összeszerelő vagy átrakó műveletet végeznek, ami végműködtetőt igényel. Ez lehet egy egyszerű markolószerkezet vagy egy többcélú karvégi eszköz szerszámadagolókkal vagy csavarbehajtókkal.

A maximális hasznos terhelés és a tehetetlenség iránti követelményeket a a karvégi szerszám plusz a termék súlya és inerciája határozza meg, aminek a robot működési specifikációján belül kell maradnia.

A legtöbb robotgyártó legalább kétféle SCARA robotot kínál, hogy teljesítse a különböző hasznos terheléseket és tehetetlenségeket. Fontos a hasznos terhelés iránti követelmények megértése – ha egy kis robot képes elvégezni a munkát, akkor nincs szükség nagyobb modell számára szükséges értékes alapterület elfoglalására.

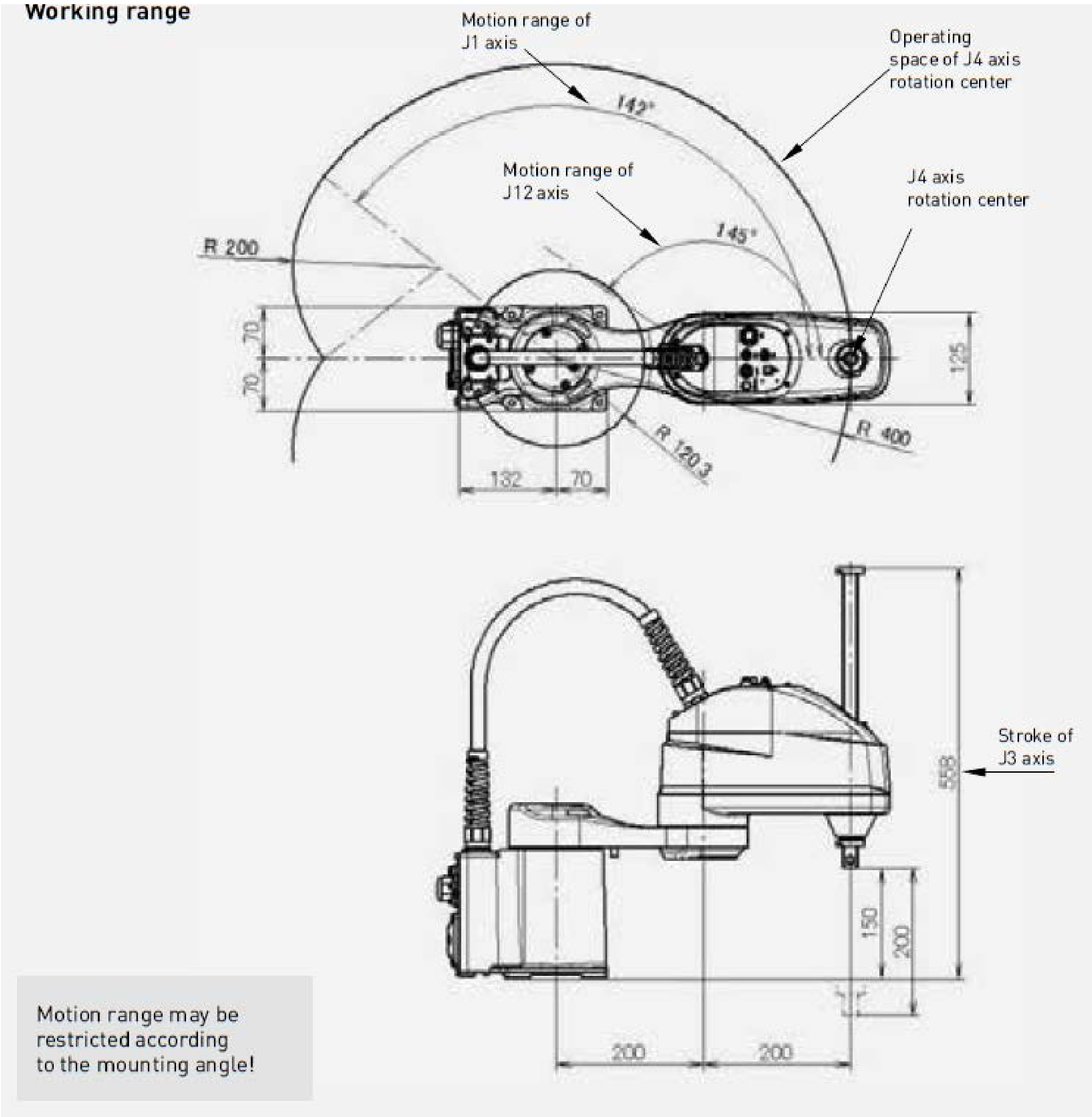
SCARA Robot SR-3iA

3 kg terhelhetőségével, 400 mm vízszintes és 200 mm függőleges kinyúlásával, a FANUC SR-3iA ideálisan alkalmas kisebb összeszerelési, felszedő és lerakó (pick and place), vizsgáló és csomagoló alkalmazásokhoz. 360°-os mozgásterével, a modell kis súlyú kialakítása, ultrakompakt helyigénye és integrált szolgáltatásai csökkentik a perifériás eszközökkel való interferencia kockázatát.

TENGELYEK SZÁMA	KINYÚLÁS	TEHERBÍRÁS
4	400 mm	3 kg

Ábra 1.1 *SCARA Robot SR-3iA*

A SCARA robotok ismételhetősége általában a legjobb az összes robottípus között. Az X-Y pozícióban előforduló hibákat az okozza, hogy J1-ben és J2-ben két motor van. Más robottípusokban három vagy több motor vesz részt az X-Y pozícióban. Minél több a motor, annál több a hibalehetőség. A kiváló ismételhetőség döntő jelentőségű kis összeszerelési alkalmazásokban, ahol az előírt tűrés néhány mikronon belül van. Ilyen alkalmazások például kapcsolók beillesztése áramköri lapokba, vagy tűk behelyezése egy apró üregbe adagolás céljából.



Ábra 1.2 *SR-3iA SCARA Robot méretezése*

A gyorsaság fontos tényező a robot kiválasztásánál, és a SCARA-k jellemzően a leggyorsabbak közé tartoznak a piacon. Négy tengelyüknek köszönhetően kevesebb mozgó csuklójuk van, és konfigurációjuk alapján a J1 és J2 vezérli az X-Y mozgást, míg a J3 és J4 a Z és a forgó mozgást. Ez leegyszerűsíti a fordított irányú kinematikai számításokat, és ezáltal kevesebb számítógép-időt igényelnek. Ha a ciklusidő kritikus jelentőségű, vegye fontolóra a SCARA megoldást.

A helyigény az a terület, amelyen a SCARA robot áll. A SCARA robotok helyigénye rendszerint kisebb az azonos kinyúlású kartezián vagy Delta robotokénál. A nagyobb munkavégzési terű SCARA robotok helyigénye az erősebb motor és a stabilitás érdekében szükséges nagyobb alap miatt magasabb.

FANUC CR sorozatú kollaboratív robotok

Tanúsított biztonságú, és akár 35 kg-os terhelésű FANUC CR sorozatú kollaboratív robotok kéz a kézben dolgoznak az emberekkel, és adnak hozzá értéket az Ön folyamatához. Becsípődés elleni védelemmel ellátva és egy puha gumi bőrbe csomagolva, a CR robot sorozatok egymás mellett dolgoznak az emberekkel további biztonsági készülékek szükséglete nélkül. A kezelő tudja vezetni, betanítani vagy egyszerűen eltolni.

Képzeljen el egy biztonsági kerítések nélküli világot, amelyben az emberek és robotok egymás mellett dolgoznak. Ebben a világban a robotok végzik az összes fárasztó munkát, aminek köszönhetően az emberek könnyebb, nagyobb képzettséget igénylő vagy nagyobb követelményeket támasztó feladatokra fordíthatják értékes idejüket.

A FANUC kollaboratív robotjaival már létrejött ez a világ. A meglévő gyártási környezetbe illesztve a robotok közvetlenül működnek együtt az emberekkel, és a csapat nélkülözhetetlen tagjaivá válnak. Az emberek mellett dolgozva átveszik az unalmas, ismétlődő feladatokat, és felemelnek akár 35 kg-ot is, így védve az emberek egészségét, és egyúttal automatizálva a teljes szerelősort.

CR-4iA kollaboratív robot

Rövid karú kompakt, 4 kg hasznos terhelésű modell.

Ábra 1.3 *CR-4iA kollaboratív robot*

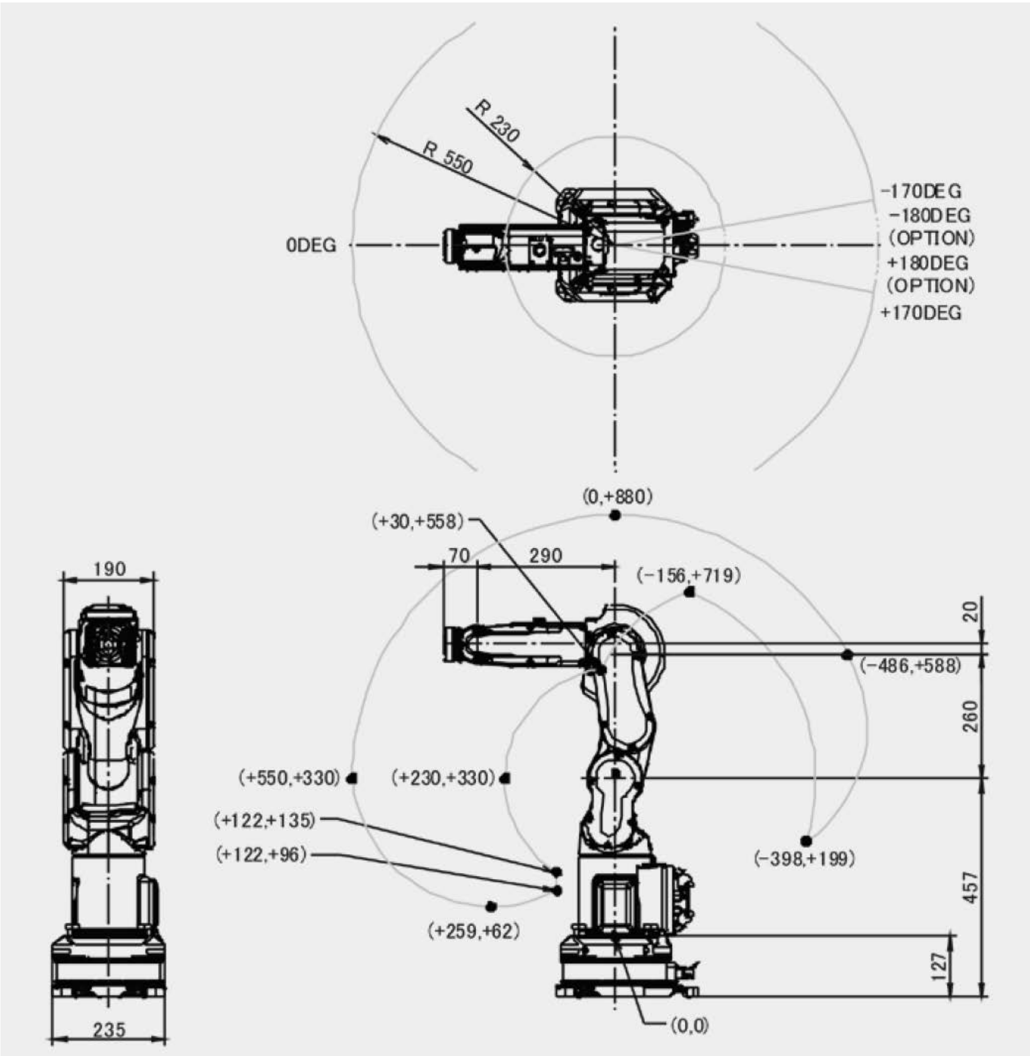
A legkisebb kollaboratív robot – zárt terekhez ideális.

Szia! Én vagyok a legkisebb a kollaboratív robotok családjában, hat tengellyel a karomban, maximális hasznos terhelésem pedig 4 kg. Kollaboratív robottársaimhoz hasonlóan átveszem a kis súlyú tárgyak emelésével járó, de ismétlődő és máskülönben kézzel végzendő feladatokat. Kompakt kialakításomnak köszönhetően szűk területen elférek, és apró tárgyakat is kezelek. Falra vagy a mennyezetre is rögzíthető vagyok. Ez tágabb mozgásteret nyújt számomra, anélkül, hogy zavarnám a kezelő munkáját.

Mivel átvállalom ezeket az unalmas feladatokat, a kezelő értelmesebb vagy sürgősebb munkákkal foglakozhat. Bonyolultabb és interaktív feladatokat közösen végezhetünk (például a robot adja át az alkatrészt, amelynek minőségellenőrzését a kezelő végzi).

Kompakt és karcsú kialakításom és a biztonsági megállító funkció eredményeképp nem kell kerítéssel körbevenni, hogy emberekkel dolgozhassam együtt. Ezzel nemcsak helyet takaríthat meg, de a gyártási költségeket is jelentősen csökkentheti.

TENGELYEK SZÁMA	KINYÚLÁS	TEHERBÍRÁS
6	550 mm	4 kg



***Ábra 1.4** CR-4iA kollaboratív robot méretezése*

R-30iB Plus kontroller

Az R-30iB Plus vezérlőegységbe integrált nagy teljesítményű PMC egység a robotok teljes be- és kimeneti (I/O) rendszeréhez hozzáfér, így a robotok teljesítményének csökkentése nélkül ad módot a perifériák aszinkron vezérlésének egyszerű leválasztására.

***Ábra 1.5** R-30iB Plus kontroller*

Ez a nagy teljesítményű és önálló egység kiváló választás kisebb robotokhoz – azon belül is kifejezetten az M sorozathoz és az LR-Mate robotokhoz terveztük. Több robotot tartalmazó robotcellák esetén több is elhelyezhető belőle egymás tetején.

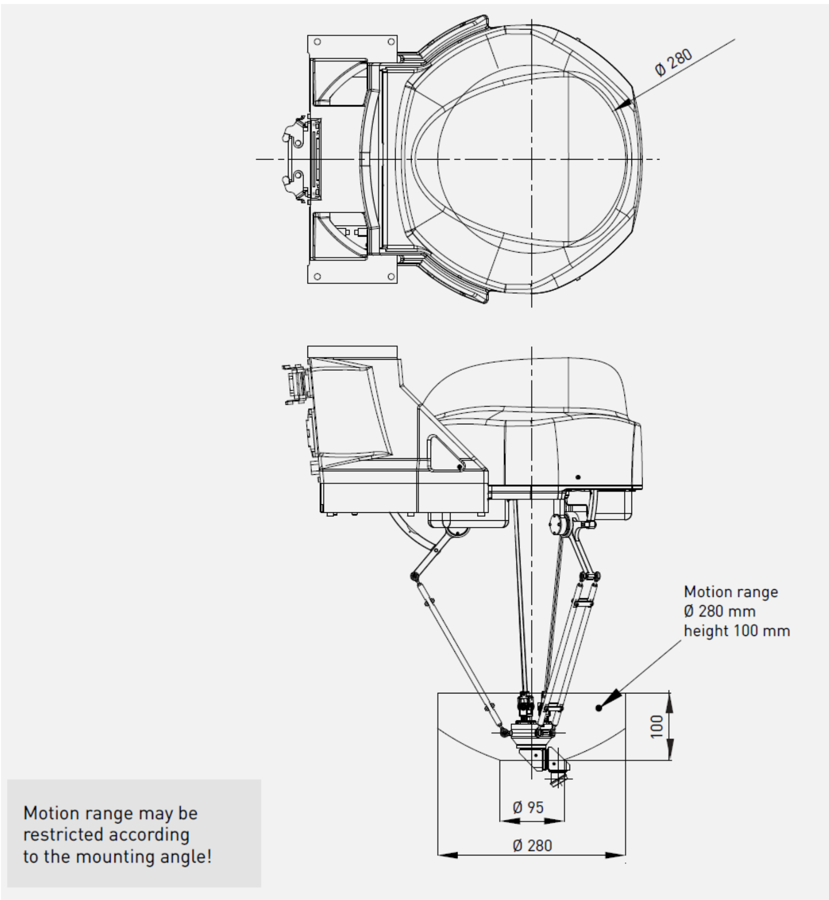
M-1iA/0.5A könnyű, delta kialakítású robot

Ez a hihetetlenül sokoldalú és mozgékony típus kiváló munkatempó elérésére képes bonyolult részegység-összeszerelési munkák esetén. Bármilyen szögben tud dolgozni, ezért ez a tökéletes választás olyan munkákra (ilyen például az összeszerelés és a felszedés), amelyek rugalmasságot és magas szintű ismétlési pontosságot követelnek meg.

TENGELYEK SZÁMA	KINYÚLÁS	TEHERBÍRÁS
6	280 mm	0.5 kg

Ábra 1.6 *M-1iA/0.5A delta robot*

A 6 tengely a FANUC szabadalmaztatott 3 tengelyű csuklójával kombinálva ideálissá teszi ezt a típust a bármilyen szögben történő felszedésre és a bonyolult alkatrészek összeszerelésére. A vezérlőegység legfeljebb négy robot vezérlésére képes. További konfigurációk is könnyen elérhetők.



Ábra 1.7 *M-1iA/0.5A delta robot méretezése*

Számos további alkalmazás lehetséges egy további, 500 gramm hasznos teher opció alkalmazásával.

2. Direkt kinematikai feladat

A világkoordináták s vektorának meghatározása a q vektorának ismeretében a direkt kinematikai feladat. Egyszerű manipulációs feladatoknál a csuklókoordinátákat közvetlenül lehet megadni.

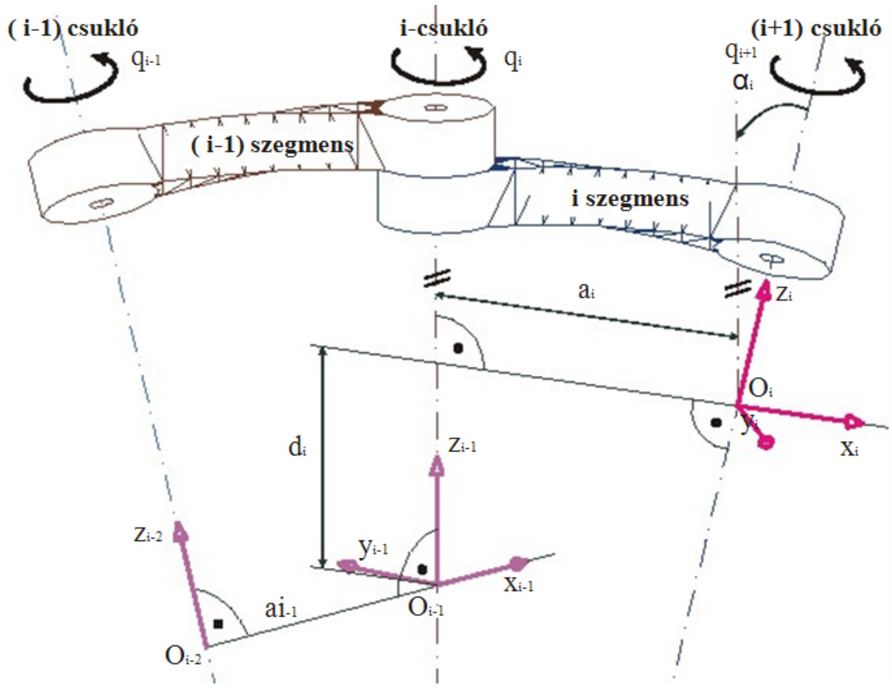
2.1 Denavit-Hartenberg eljárás

A csuklókoordináták transzformálása világkoordinátákba a Denavit-Hartenberg féle transzformációs mátrixszal történik. Denavit és Hartenberg ezt az eljárást 1955-ben publikálta és ezért nevezték el együttesen Denavit-Hartenberg módszernek. Az eljárás lényege az, hogy egy koordinátarendszer két haladó és két forgó mozgással egy másikba átvihető. A robotmanipulátoroknál használt Denavit-Hartenberg paraméterek: *d* és *a* távolságok és α szög.

A Denavit-Hartenberg eljárás szerint az i-edik és i+1-edik robotcsuklókra egy-egy derékszögű koordinátarendszert ültetünk, a csukló tengelyének iránya a z tengely és a két egymást követő koordinátarendszert a következő irányszabályok szerint határozzuk meg:

Az i+1-es robotcsuklón megválasztjuk az O_i x_i y_i z_i koordinátarendszert a következő módon:

- A z_i tengely az i+1-edik csukló irányában fekszik,
- az x_i tengely a két szemlélt csukló (i-edik és i+1-edik) tengelyének közös normálisába esik és az i-edik csuklótól az i+1-edik csukló felé mutat,
- az y_i tengely kielégíti a következő feltételt: $x_i \times y_i = z_i$ - jobbcsavar irányú.



Ábra 2.1. A derékszögű koordinátarendszerek helyzete Denavit-Hartenberg eljárás szerint

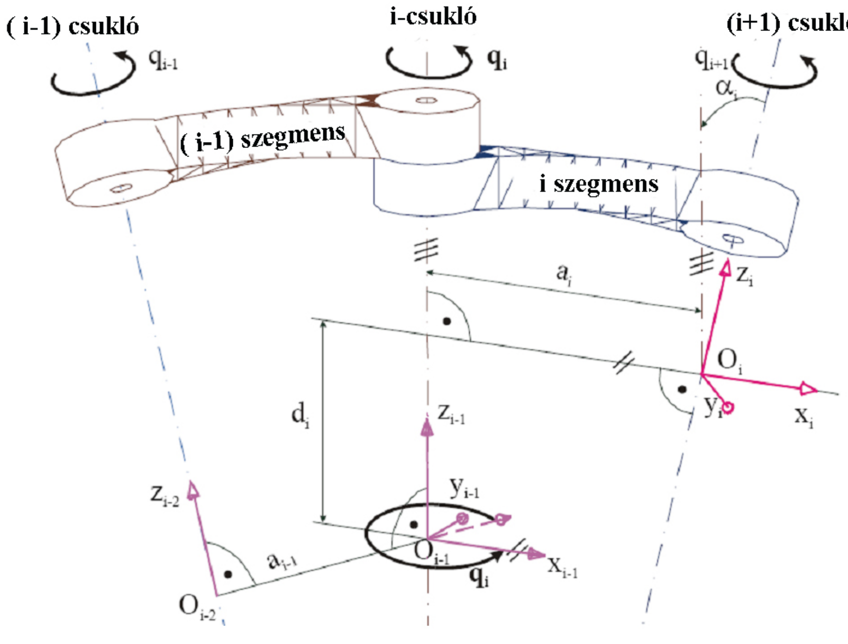
Az i-edik robotcsuklón megválasztjuk az O_{i-1} x_{i-1} y_{i-1} z_{i-1} koordinátarendszert a következő módon:

- A z_{i-1} tengely az i-edik csukló irányában fekszik,
- az x_{i-1} tengely az i-1-edik és i-edik csuklók tengelyének közös normálisába esik és az i-1-edik csuklótól a i-edik csukló felé mutat,
- az y_{i-1} tengely kielégíti a következő feltételt: $\mathbf{x}_{i-1}$ x $\mathbf{y}_{i-1}$=$\mathbf{z}_{i-1}$ - jobbcsavar irányú.

A Denavit-Hartenberg paraméterek a következők:

- d_i : - minden csuklótengelynek két normálisa van (a_{i-1} és a_i) és a normálisok közötti az i-edik csukló tengelye mentén mért távolság a d_i,
- a_i : – az i-edik és i+1-edik csukló-tengelyek közös normálisának a hossza,
- α_i : - az i-edik csukló és az i+1-edik csukló tengelye közötti jobbcsavar irányú szög az a_i-re merőleges síkban.
- A q_i csuklókoordináta, rotációs csukló esetében az x_{i-1} és x_i tengelyek között bezárt jobbcsavar irányú szög nagysága, amely zérus, ha a tengelyek egyirányúak vagy párhuzamosak egymással. A Denavit-Hartenberg eljárás szerint felvitt két szomszédos derékszögű koordinátarendszer $O_{i-1}x_{i-1}y_{i-1}z_{i-1}$ és $O_ix_iy_iz_i$ két haladó és két forgó mozgással egymásba átvihető a következő lépések szerint:

Először q_i elfordulás z_{i-1} körül: x_{i-1} párhuzamos lesz x_i-vel. (2.2. ábra):

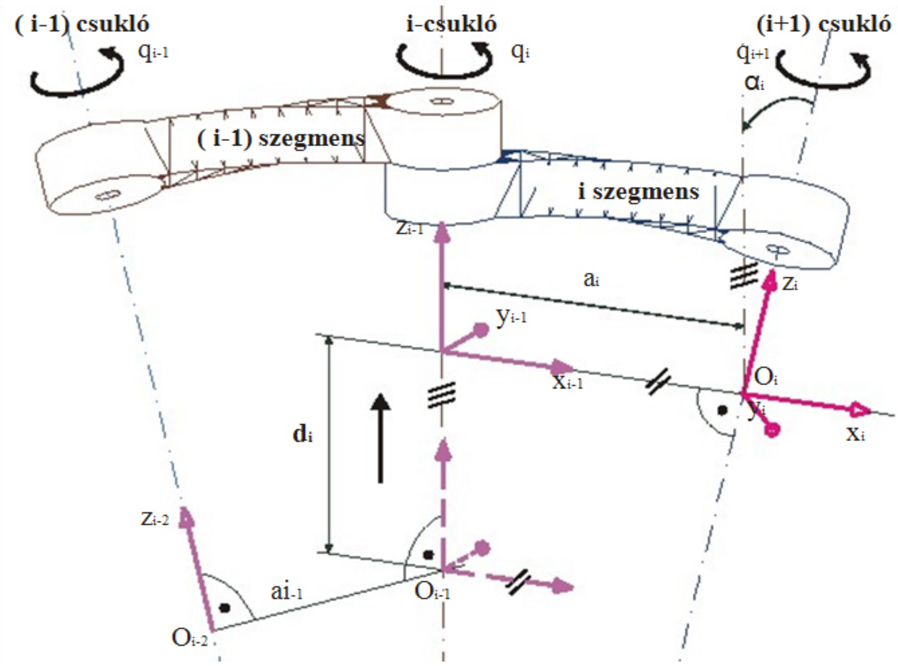


Ábra 2.2. Az $\mathbf{O_{i-1}x_{i-1}y_{i-1}z_{i-1}}$ koordinátarendszer $\mathbf{q_i}$ forgatása

Az így elvégzett forgatás a következő homogén koordináta-transzformációs mátrixszal írható le.

$$\mathbf{D}(q_i) = \begin{bmatrix} \cos q_i & -\sin q_i & 0 & 0 \\ \sin q_i & \cos q_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Másodszor következzék d_i transzláció a z_{i-1} mentén, a z_{i-1} és x_i metszéspontjáig (2.3. ábra), így az x_{i-1} egybeesik az x_i -vel:

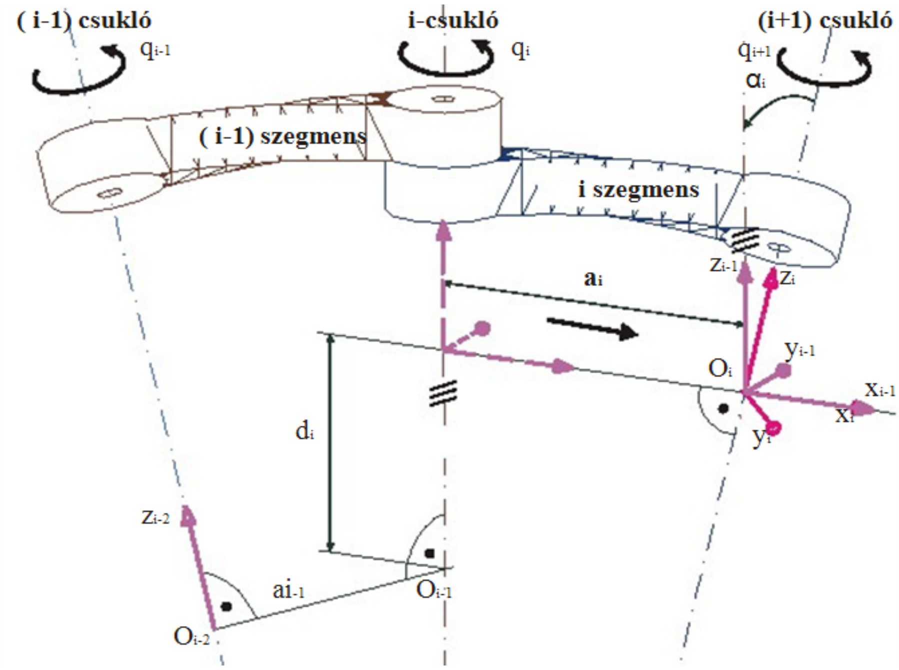


Ábra 2.3. Az elforgatott $O_{i-1}x_{i-1}y_{i-1}z_{i-1}$ koordinátarendszer d_i transzlációja

Az így elvégzett forgatás a következő homogén koordináta-transzformációs mátrixszal írható le (leolvasható az ábráról 2.4.):

$$\mathbf{D}(d_i) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Harmadszor következzék a_i transzláció x_i mentén az O_i origóig (2.4. ábra), így a koordinátarendszerek metszéspontja fedésbe kerül.

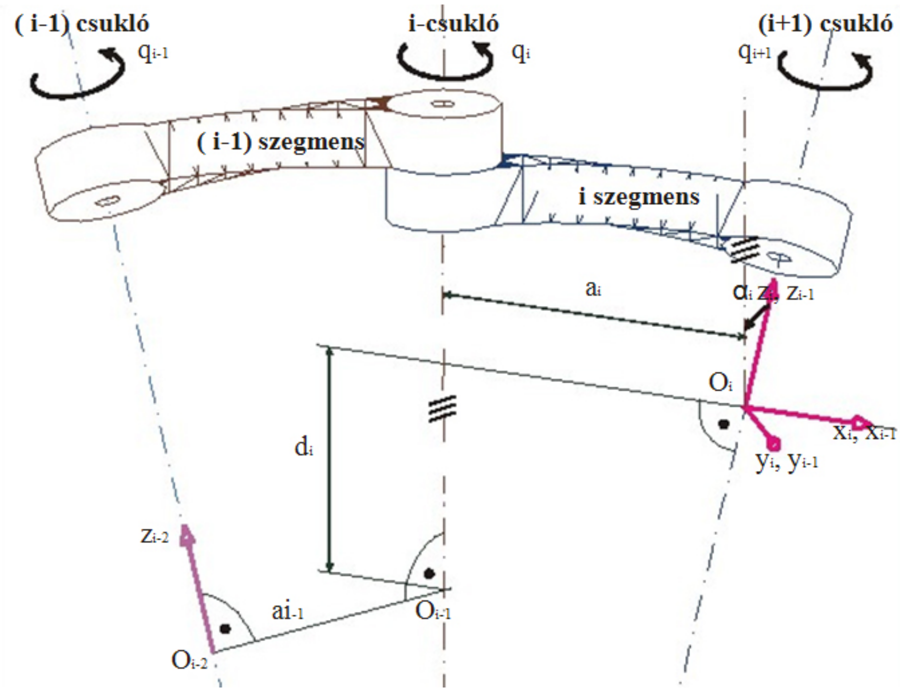


Ábra 2.4. Az elforgatott és elmozdult $O_{i-1}x_{i-1}y_{i-1}z_{i-1}$ koordinátarendszer a_i transzlációja

$$\mathbf{D}(a_i) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Negyedszer α_i Jobbcsavar irányú elfordulás az x_i körül: hogy a z és y tengelyek is fedésbe kerüljenek (ábra. 2.5.). Az így elvégzett rotáció a következő homogén koordináta-transzformációs mátrixszal írható le:

$$\mathbf{D}(\alpha_i) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha_i & -\sin\alpha_i & 0 \\ 0 & \sin\alpha_i & \cos\alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Ábra 2.5. A koordinátarendszer α_i forgatása

A fenti négy mozzanat a következő alakú Denavit–Hartenberg transzformációs mátrixban foglalható össze:

$$^{i-1}\mathbf{D}_i = \mathbf{D}(\mathbf{q_i})\,\mathbf{D}(\mathbf{d_i})\,\mathbf{D}(\mathbf{a_i})\,\mathbf{D}(\boldsymbol{\alpha_i})$$

Behelyettesítve a mátrixokat elvégezve a mátrixszorzást megkapjuk a következő alakú Denavit–Hartenberg féle transzformációs mátrixot a két egymást követő rotációs csuklóra rögzített koordinátarendszer esetén:

$$^{i-1}\mathbf{D}_i = \begin{bmatrix} \cos q_i & -\sin q_i \cos\alpha_i & \sin q_i \sin\alpha_i & a_i \cos q_i \\ \sin q_i & \cos q_i \cos\alpha_i & -\cos q_i \sin\alpha_i & a_i \sin q_i \\ 0 & \sin\alpha_i & \cos\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Transzlációs csuklók esetében a koordinátarendszereket úgy választjuk meg, hogy $a_i = 0$, a d_i hossz q_i, lesz, ami pedig a rotációs csuklónál a q_i forgásszög, az most θ_i, paraméter lesz, vagyis:

$$a_i = 0$$

$$d_i = q_i$$

$$q_i = \theta_i$$

Így a Denavit–Hartenberg féle transzformációs mátrix a transzlációs csuklók esetén:

$$
{}^{i-1}\mathbf{D}_i = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i\cos\alpha_i & \sin\theta_i\sin\alpha_i & 0 \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i\cos\alpha_i & -\cos\theta_i\sin\alpha_i & 0 \\ 0 & \sin\alpha_i & \cos\alpha_i & q_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

Miután tehát minden egymást követő koordinátarendszer esetében (a fenti eljárás szerint) meghatároztuk a Denavit–Hartenberg (D-H) féle transzformációs-mátrixot, akkor a robotmanipulátor platformjához kötött álló koordinátarendszer és az effektorhoz kötött mozgó koordinátarendszer közötti D-H féle homogén transzformációs-mátrixot, a két egymást követő koordinátarendszerek DH mátrixainak szorzata adja:

$$
{}^{0}\mathbf{T}_n = {}^{0}\mathbf{D}_1\, {}^{1}\mathbf{D}_2\, {}^{2}\mathbf{D}_3 \ldots {}^{n-2}\mathbf{D}_{n-1}\, {}^{n-2}\mathbf{D}_n
$$

A ${}^{o}T_n$ mátrix első három sora és oszlopa a robotmanipulátor platformhoz kötött álló és az effektorhoz kötött mozgó koordináta rendszerek közötti rotációs mátrixot, míg a ${}^{o}T_n$ mátrix negyedik oszlopa a az effektor TCP pontjának a nyugvó koordináta-rendszerben lévő koordinátáit határozza meg. Amikor a robotmanipulátor-csuklóknál rögzítjük a megfelelő koordináta-rendszereket és meghatározzuk a D-H paramétereket: α_i, a_i, d_i, (i = 1,2,...,n), akkor a homogén transzformációs-mátrixok csak a csuklókoordináták q_i függvényeivé válnak. Tehát ha a robotmanipulátornál meghatározzuk a mátrix numerikus alakját, akkor abból kiolvashatjuk a három módosított Euler szöget és az effektor TCP szerszámközéppontjának a pozícióját, így tulajdonképpen meghatározzuk a robotmanipulátor világkoordinátáit.

$$
{}^{0}\mathbf{T}_n = \begin{bmatrix} & & & x \\ & {}^{0}\mathbf{R}_n & & y \\ & & & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

Megállapítható tehát, hogy ily módon azzal, hogy - a három módosított Euler szöget és az effektor TCP pontjának a pozícióját meghatároztuk, a direkt kinematikai feladatot megoldottuk. A ${}^{0}T_n$ mátrix meghatározása tehát a csuklókoordináták vektorának ismeretében, a direkt kinematikai feladat megoldásának az alapja. Megjegyezhető, hogy a módosított Euler szögek kiszámítása a ${}^{o}T_n$ mátrixból nem függ a robotmanipulátor típusától.

2.2 Az effektor orientációja

Robotmanipulátor effektorának az orientációját a robotplatformhoz kötött nyugvó koordinátarendszerhez viszonyítva, a módosított Euler szögekkel ψ, θ, φ határozzuk meg.

Tekintsük két koordináta rendszer és a rotáció között:

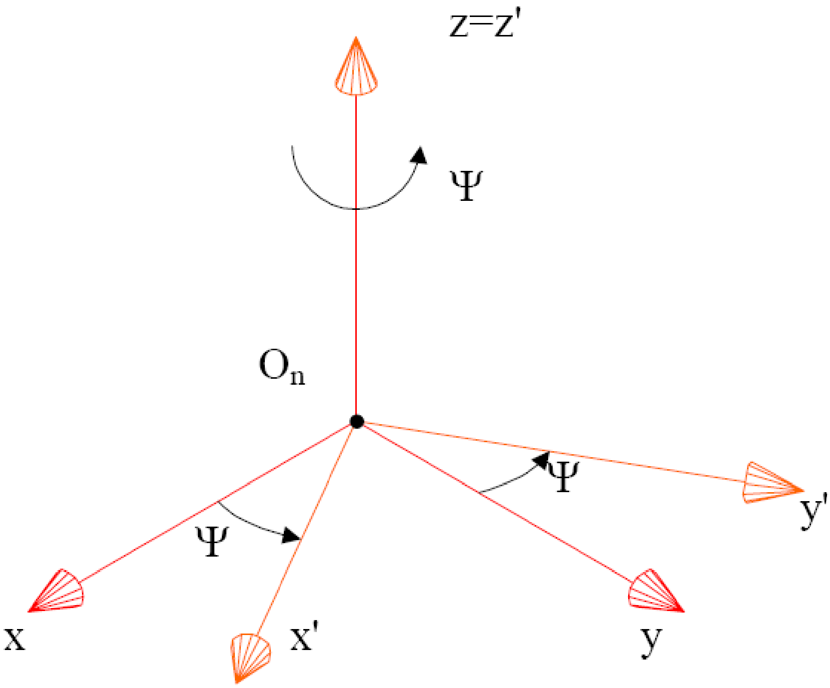
- $Ox_oy_oz_o$ nyugvó alapkoordinátarendszer, amely a robotmanipulátor platformjához van kötve.
- O_nxyz mozgó koordinátarendszer az O_n origóval, amely a robotmanipulátor effektorához kötődik.

A mozgó koordinátarendszer orientációja az nyugvóhoz viszonyítva leírható a következő rotációs mátrixszal ${}^0R_n$:

$$
{}^0\mathbf{R}_n = \begin{bmatrix} e_{1x} & e_{2x} & e_{3x} \\ e_{1y} & e_{2y} & e_{3y} \\ e_{1z} & e_{2z} & e_{3z} \end{bmatrix}
$$

A mozgó koordinátarendszer rotációja az nyugvó koordinátarendszerhez viszonyítva bemutatható a következő három rotációval:

1. A mozgó O_nxyz koordinátarendszer első rotációja a csavarási ψ tengelye körüli z (Ábra 2.6):

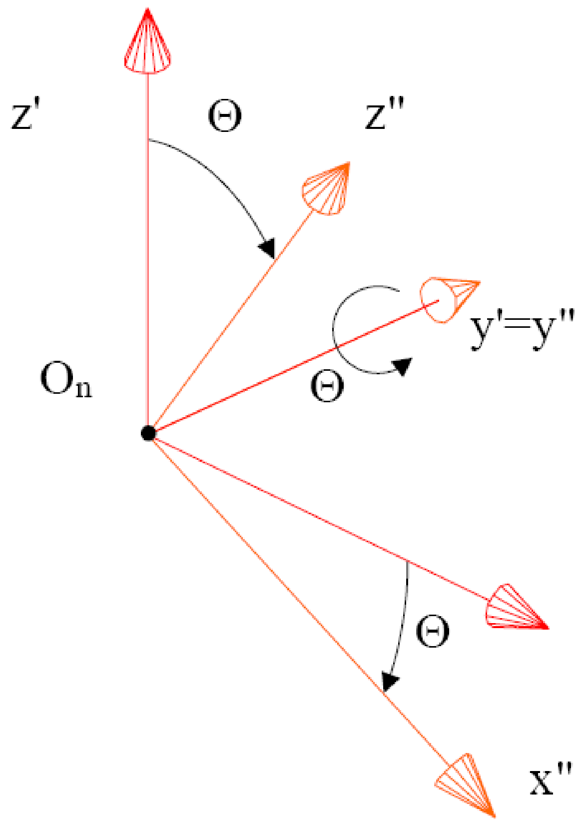


Ábra 2.6. A mozgó koordinátarendszer rotációja a csavarási ψ szög szerint

Az így elvégzett rotációnak a következő formájú rotációs mátrixokat R(ψ) felel meg (az 2.6. ábráról közvetlenül leolvasva):

$$\mathbf{R}(\psi)=\begin{bmatrix}\cos\psi & -\sin\psi & 0\\ \sin\psi & \cos\psi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

2. Rotáció mozgó $O_n x'y'z'$ koordinátarendszer második rotációja a θ billentési szög szerint, amely az y' tengelye körüli (Ábra 2.7).

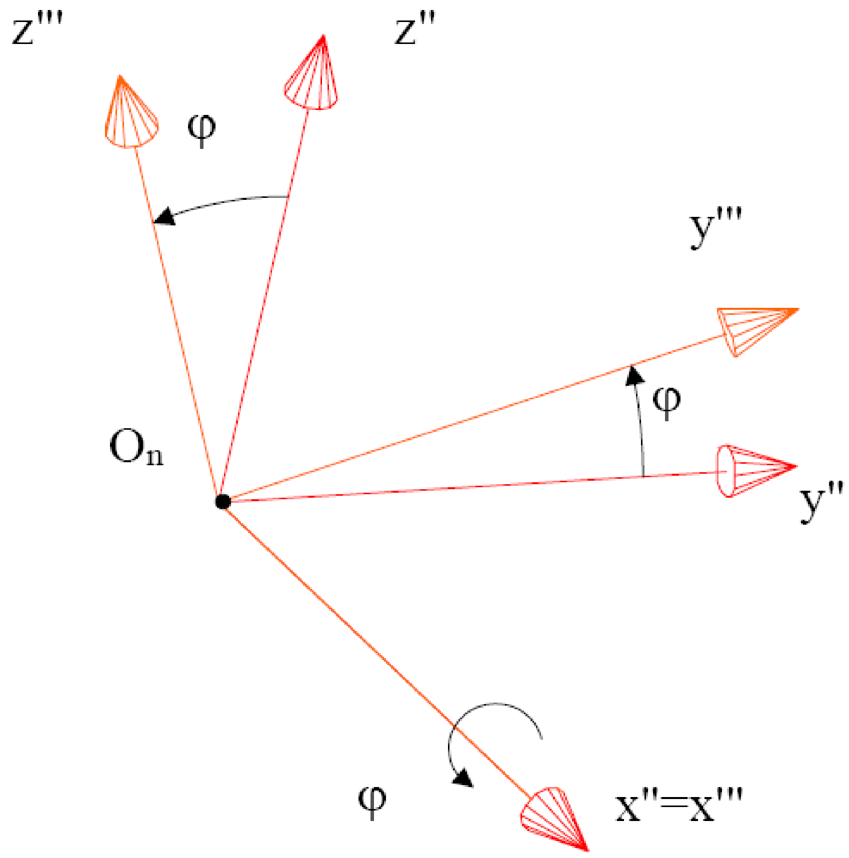


Ábra 2.7. Rotáció mozgó koordinátarendszer második rotációja a θ billentési szög szerint

Az így elvégzett rotációnak a következő formájú rotációs mátrix R(θ) felel meg:

$$\mathbf{R}(\theta)=\begin{bmatrix}\cos\theta & 0 & \sin\theta\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta\end{bmatrix}$$

3. Rotáció mozgó O_nx''y''z'' koordinátarendszer a gördülő ϕ szög tengelye körüli x'' (Ábra 2.8.):



Ábra 2.8. A mozgó koordinátarendszer harmadik rotációja a forgatási ϕ szög szerint

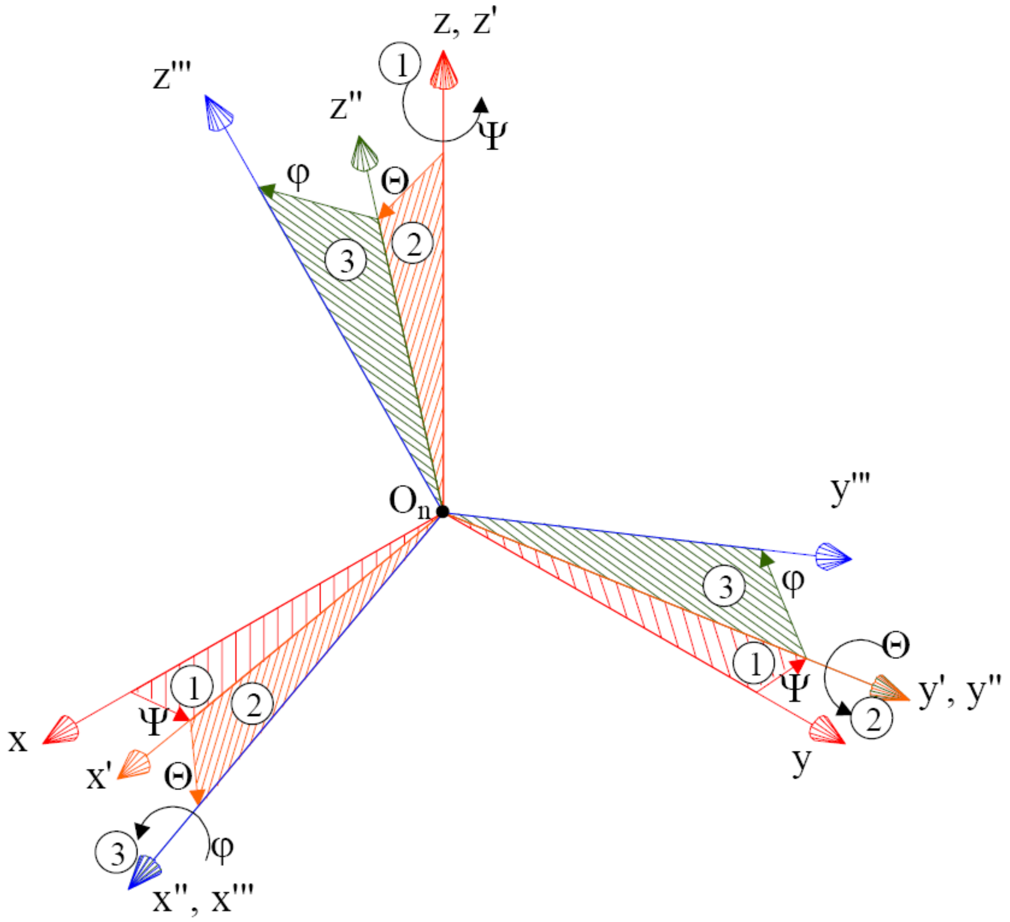
Ez a rotációnak megfelel a következő rotációs mátrix **R**(ϕ) :

$$\mathbf{R}(\varphi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$$

A fent elvégzett három rotáció együttesen az 2.9 ábrán van bemutatva.

A felírt rotációs mátrixokat (1), (2) és (3) felel meg, mátrix szorzásokat elvégezve felírható:

$$^{\circ}\mathbf{R}_n = \mathbf{R}(\psi)\mathbf{R}(\theta)\mathbf{R}(\varphi)$$



Ábra 2.9. Módosított Euler szögek

A rotációs mátrixok helyetesítésével a következő ^0R_n mátrixot kapjuk:

$$
{}^{\circ}\mathbf{R}_n = \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}
$$

$$
{}^{\circ}\mathbf{R}_n = \begin{bmatrix} \cos\psi\cos\theta & \cos\psi\sin\theta\sin\varphi - \sin\psi\cos\varphi & \cos\psi\sin\theta\cos\varphi + \sin\psi\sin\varphi \\ \sin\psi\cos\theta & \sin\psi\sin\theta\sin\varphi + \cos\psi\cos\varphi & \sin\psi\sin\theta\cos\varphi - \cos\psi\sin\varphi \\ -\sin\theta & \cos\theta\sin\varphi & \cos\theta\cos\varphi \end{bmatrix}
$$

Továbbá következik:

$$
\begin{bmatrix} e_{1x} & e_{2x} & e_{3x} \\ e_{1y} & e_{2y} & e_{3y} \\ e_{1z} & e_{2z} & e_{3z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\psi\cos\theta & \cos\psi\sin\theta\sin\varphi - \sin\psi\cos\varphi & \cos\psi\sin\theta\cos\varphi + \sin\psi\sin\varphi \\ \sin\psi\cos\theta & \sin\psi\sin\theta\sin\varphi + \cos\psi c\cos\varphi & \sin\psi\sin\theta\cos\varphi - \cos\psi\sin\varphi \\ -\sin\theta & \cos\theta\sin\varphi & \cos\theta\cos\varphi \end{bmatrix}
$$

A mátrixegyenlet egyes elemeit egyenlővé téve, felírható:

$$e_{1x} = \cos\psi\cos\theta$$

$$e_{1y} = \sin\psi\cos\theta$$

$$e_{1z} = -\sin\theta$$

$$e_{2x} = \cos\psi\sin\theta\sin\varphi-\sin\psi\cos\varphi$$

$$e_{2y} = \sin\psi\sin\theta\sin\varphi+\cos\psi\cos\varphi$$

$$e_{2z} = \cos\theta\sin\varphi$$

$$e_{3x} = \cos\psi\sin\theta\cos\varphi+\sin\psi\sin\varphi$$

$$e_{3y} = \sin\psi\sin\theta\cos\varphi-\cos\psi\sin\varphi$$

$$e_{3z} = \cos\theta\cos\varphi$$

Így 9 egyenletből álló egyenletrendszert kaptunk, amely 3 ismeretlent tartalmaz ψ, θ és φ, mivel az ${}^{0}R_{n}$ mátrix ortogonális, ezek az egyenletek nem függetlenek egymástól. A ψ, θ és φ szögeket a következő módon határozhatjuk meg:

a.) Szorozzuk meg az mindkét egyenlet oldalát sinψ-vel és az cosψ-vel és kivonási művelet felírható:

$$e_{1x}\sin\psi - e_{1y}\cos\psi = 0$$

ahonnan kiszámítható a ψ szög nagysága:

$$\psi = \operatorname{arctg}\frac{e_{1y}}{e_{1x}} + 2k\pi$$

b.) Szög θ lehet kiszámítani. Szorozzuk meg az mindkét egyenlet oldalát cosφ-vel és az sinφ-vel majd az összeadási művelet felírható:

$$e_{1x}\cos\psi+ e_{1y}\sin\psi = \cos\theta$$

$$\theta = \operatorname{arctg}\left[\frac{-e_{1z}}{e_{1x}\cos\psi + e_{1y}\sin\psi}\right] + 2k\pi$$

c.) Szorozzuk meg az mindkét egyenlet oldalát cosψ-vel és az sinψ-vel így a kivonási művelet felírható:

$$e_{2z}\cos\varphi - e_{3z}\sin\varphi = 0$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{e_{2z}}{e_{3z}} + 2k\pi$$

A ψ, θ és φ szögeket többféle módon határozhatjuk meg. A szögek számításánál numerikus problémák jelentkezhetnek, ha az előbbi relációkban a nevezők kis értékűek. Ez megfelelő numerikus eljárással kiküszöbölhető. Az egyetlen szinguláris eset akkor jelentkezik, ha a $\theta = \pm \pi/2$, vagyis: $e_{1x} = e_{1y} = e_{2z} = e_{3z} = 0$. Ekkor az egyenlet nem oldható meg, ezért a ψ szög értéket tetszőlegesen választjuk meg. Az ilyen ψ szög ismeretében a φ szöget a következő módon számítjuk ki:

$$\varphi = \mathrm{arctg}\frac{-e_{2x}}{e_{2y}} - \psi + 2k\pi \qquad \text{za } \theta = -k\pi/2$$

$$\varphi = \mathrm{arctg}\frac{e_{2x}}{e_{2y}} + \psi + 2k\pi \qquad \text{za } \theta = k\pi/2$$

Az relációkban a k értéket úgy határozzuk meg, hogy figyelembe vesszük a direkt kinematikai feladat megoldásánál a világkoordináták két pont közötti minimális változását (mivel a robotmanilpulátor folyamatos mozgásának a világkoordináták folyamatos változása felel meg).

A robotmanipulátor effektorának orientáció meghatározását a ψ, θ és φ szögek kiszámításával befejezettnek tekintjük.

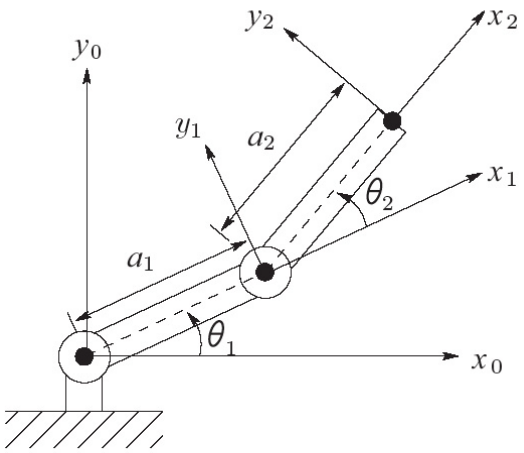
Megadásával:

- Descartes féle derékszögű koordinátáinak (pozicionálás) és a
- három módosított Euler-féle szögeinek (orientáció) meghatározásával

a direkt kinematikai feladatot teljességben megoldottnak tekintjük.

Síkbéli manipulátor

Meghatározni a DH paramétereket és leírni a következő ábrán látható síkbéli manipulátor közvetlen kinematikai mátrixát.



Ábra 2.10. Két szegmenses síkbéli manipulátor

Megoldás:

A Denavit-Hartenberg féleparaméterek a következő táblában vannak megadva:

Szegmensek	Θ_i	α_i	a_i	d_i	$\cos\alpha_i$	$\sin\alpha_i$
1	q_1	0	a_1	0	1	0
2	q_2	0	a_2	0	1	0

Az egyes szegmensek közötti homogén transzformációs mátrixok a következők:

$$ {}^{0}T_1 = \begin{bmatrix} C_1 & -S_1 & 0 & a_1C_1 \\ S_1 & C_1 & 0 & a_1S_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ {}^{1}T_2 = \begin{bmatrix} C_2 & -S_2 & 0 & a_2C_2 \\ S_2 & C_2 & 0 & a_2S_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

Ahol a következő jelöléseket vezetjük be:

$$C_1 = \cos q_1 \qquad S_1 = \sin q_1$$

$$C_2 = \cos q_2 \qquad S_2 = \sin q_2$$

A fogókar koordinátarendszere és a nem mozgó rész közötti homogén transzformációs mátrixot, a mátrixok szorzásával kapjuk meg az alábbi képlet alapján:

$${}^{0}T_2 = {}^{0}T_1 * {}^{1}T_2$$

Vagyis:

$${}^{0}T_2 = \begin{bmatrix} C_1C_2 - S_1S_2 & -C_1S_2 - S_2C_2 & 0 & a_2(C_1C_2 - S_1S_2) + a_1C_1 \\ S_1C_2 - C_1S_2 & -S_1S_2 + C_1C_2 & 0 & a_2(S_1C_2 + C_1S_2) + a_1S_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ha bevezetjük a váltásokat:

$$S_{12} = \sin(q_1 + q_2) = S_1C_2 + C_1S_2$$

$$C_{12} = \cos(q_1 + q_2) = C_1C_2 - S_1S_2$$

A következő érvényes:

$${}^{0}T_2 = \begin{bmatrix} C_{12} & -S_{12} & 0 & a_1C_1 + a_2C_{12} \\ S_{12} & C_{12} & 0 & a_1S_1 + a_2S_{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

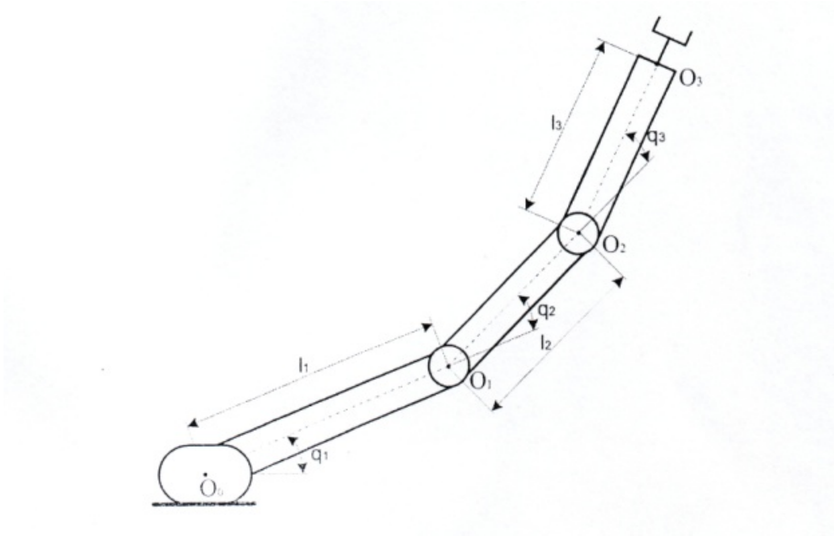
Jegyezzük meg, hogy ezt megkaphatjuk közvetlenül is az $O_2x_2y_2z_2$ koordinátarendszer $O_0x_0y_0z_0$ koordinátarendszerre történő leképezésével, vagyis a fogó helyzetére érvényes:

$$x = a_1C_1 + a_2C_{12}$$

$$y = a_1S_1 + a_2S_{12}$$

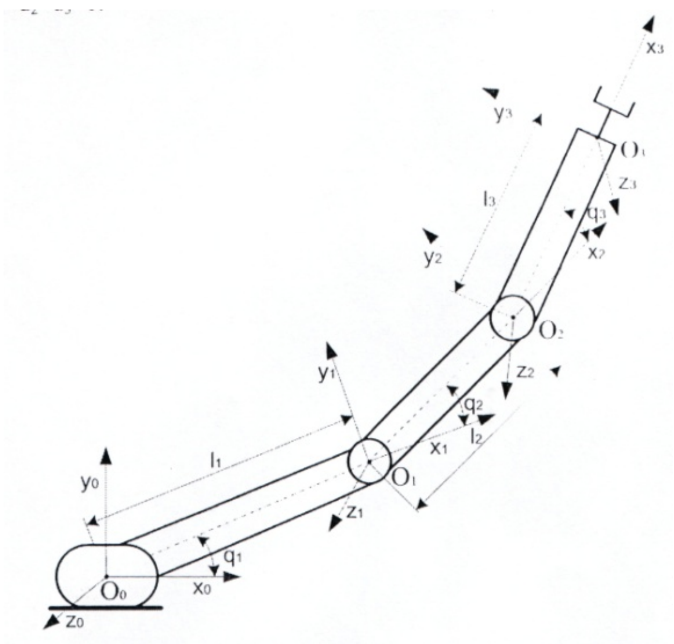
Három szabadságfokú síkbéli manipulátor

Meghatározni a DH paramétereket és leírni a következő ábrán látható síkbéli manipulátor közvetlen kinematikai mátrixát.



Ábra 2.11. Három szegmenses síkbéli manipulátor

Megoldás:



Ábra 2.12. Három szegmenses síkbéli manipulátor és koordinátarendszerei

A Denavit-Hartenberg féleparaméterek a következő táblában vannak megadva:

Szegmensek	Θ_i	α_i	a_i	d_i	$\cos\alpha_i$	$\sin\alpha_i$
1	q_1	0	l_1	0	1	0
2	q_2	0	l_2	0	1	0
3	q_3	0	l_3	0	1	0

Az egyes szegmensek közötti homogén transzformációs mátrixok a következők:

$$ {}^{0}T_1 = \begin{bmatrix} C_1 & -S_1 & 0 & l_1C_1 \\ S_1 & C_1 & 0 & l_1S_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ {}^{1}T_2 = \begin{bmatrix} C_2 & -S_2 & 0 & l_2C_2 \\ S_2 & C_2 & 0 & l_2S_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ {}^{2}T_3 = \begin{bmatrix} C_3 & -S_3 & 0 & l_3C_3 \\ S_3 & C_3 & 0 & l_3S_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

Ahol a következő jelöléseket vezetjük be:

$$ C_1 = \cos q_1 \qquad S_1 = \sin q_1 $$

$$ C_2 = \cos q_2 \qquad S_2 = \sin q_2 $$

$$ C_3 = \cos q_3 \qquad S_3 = \sin q_3 $$

A fogókar koordinátarendszere és a nem mozgó rész közötti homogén transzformációs mátrixot, a mátrixok szorzásával kapjuk meg az alábbi képlet alapján:

$$ {}^{0}T_3 = {}^{0}T_1 * ({}^{1}T_2 * {}^{2}T_3) $$

Vagyis:

$$ {}^{1}T_3 = \begin{bmatrix} C_2C_3 - S_2S_3 & -C_2S_3 - S_3C_3 & 0 & l_3(C_2C_3 - S_2S_3) + l_2C_2 \\ S_2C_3 - C_2S_3 & -S_2S_3 + C_2C_3 & 0 & l_3(S_2C_3 + C_2S_3) + l_2S_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

Ha bevezetjük a váltásokat:

$$S_{23} = \sin(q_2 + q_3) = S_2C_3 + C_2S_3$$

$$C_{23} = \cos(q_2 + q_3) = C_2C_3 - S_2S_3$$

A következő érvényes:

$$^{1}T_3 = \begin{bmatrix} C_{23} & -S_{23} & 0 & l_2C_2 + l_3C_{23} \\ S_{23} & C_{23} & 0 & l_2S_2 + l_3S_{23} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Jegyezzük meg, hogy ezt megkaphatjuk közvetlenül is az $O_3x_3y_3z_3$ koordinátarendszer $O_0x_0y_0z_0$ koordinátarendszerre történő leképezésével, vagyis a fogó helyzetére érvényes:

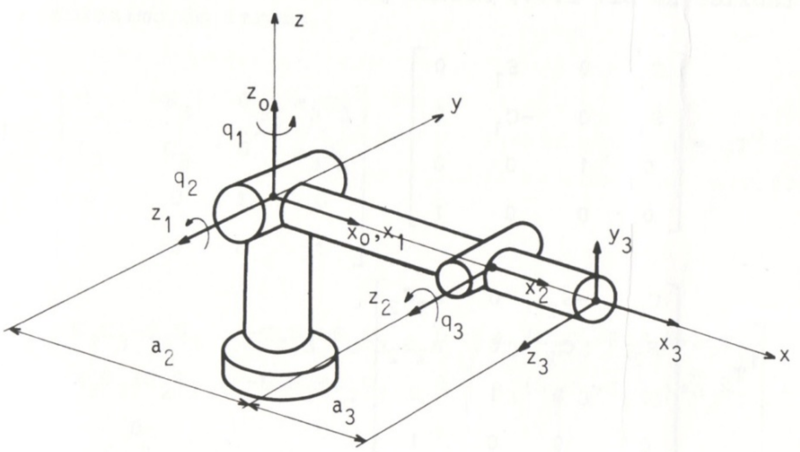
$$^{0}T_3 = \begin{bmatrix} C_{123} & -S_{123} & 0 & l_1C_1 + l_2C_{12} + l_3C_{123} \\ S_{123} & C_{123} & 0 & l_1S_1 + l_2S_{12} + l_3S_{123} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x = l_1C_1 + l_2C_{12} + l_3C_{123}$$

$$y = l_1S_1 + l_2S_{12} + l_3S_{123}$$

RRR tipusú robotkonfiguráció

Meghatározni a képen látható három szabadságfokú manipulátor alap beállításának DH paramétereit:



Ábra 2.13. Három szabadságfokú manipulátor

Megoldás:

A Denavit-Hartenberg féleparaméterek a következő táblában vannak megadva:

Szegmensek	Θ_i	α_i	a_i	d_i	$\cos\alpha_i$	$\sin\alpha_i$
1	q_1	90°	0	0	0	1
2	q_2	0	a_2	0	1	0
3	q_3	0	a_3	0	1	0

Az egyes szegmensek közötti homogén transzformációs mátrixok a következők:

$$^{0}T_1 = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & S_1 & 0 \\ S_1 & 0 & -C_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A többi mátrixot is ugyanilyen módon kapjuk meg

$$
{}^{1}T_{2} = \begin{bmatrix} C_2 & -S_2 & 0 & a_2C_2 \\ S_2 & C_2 & 0 & a_2S_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
{}^{2}T_{3} = \begin{bmatrix} C_3 & -S_3 & 0 & a_3C_3 \\ S_3 & C_3 & 0 & a_3S_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

A fogókar koordinátarendszere és a nem mozgó rész közötti homogén transzformációs mátrixot, a mátrixok szorzásával kapjuk meg az alábbi képlet alapján:

$$
{}^{0}T_{3} = {}^{0}T_{1} * ({}^{1}T_{2} * {}^{2}T_{3})
$$

Vagyis:

$$
{}^{1}T_{3} = {}^{1}T_{2}\,{}^{2}T_{3} = \begin{bmatrix} C_2C_3 - S_2S_3 & -C_2S_3 - S_2C_3 & 0 & a_3(C_2C_3 - S_2S_3) + a_2C_2 \\ S_2C_3 + C_2S_3 & -S_2S_3 + C_2C_3 & 0 & a_3(S_2C_3 + C_2S_3) + a_2S_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

Ha bevezetjük a váltásokat:

$$
S_{23} = \sin(q_2 + q_3) = S_2C_3 + C_2S_3
$$

$$
C_{23} = \cos(q_2 + q_3) = C_2C_3 - S_2S_3
$$

A következő érvényes:

$$ {}^{1}T_3 = \begin{bmatrix} C_{23} & -S_{23} & 0 & a_3C_{23}+a_2C_2 \\ S_{23} & C_{23} & 0 & a_3S_{23}+a_2S_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

Végül eljutunk a következő megoldáshoz:

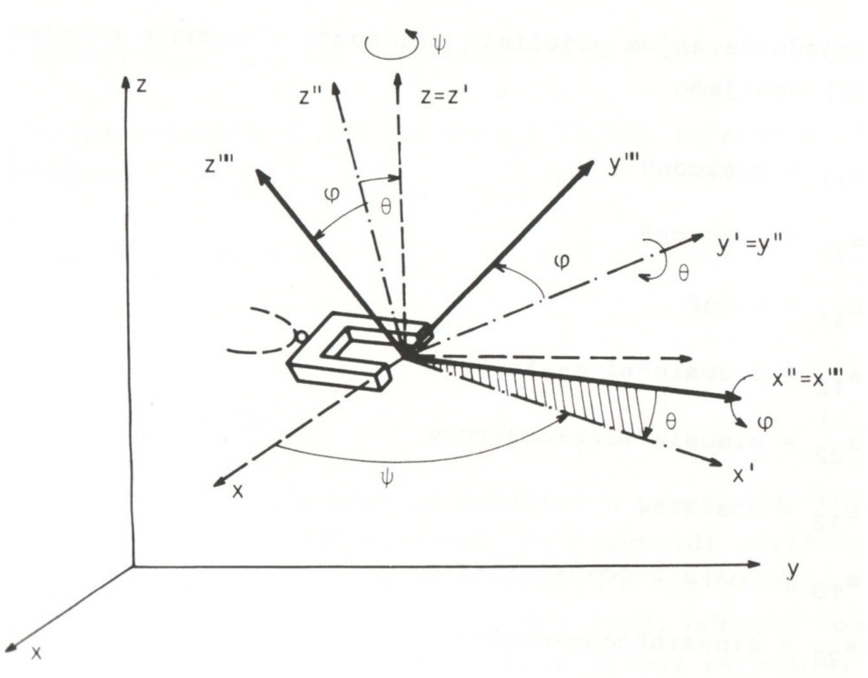
$$ {}^{0}T_3 = \begin{bmatrix} C_1C_{23} & -C_1S_{23} & S_1 & C_1(a_3C_{23}+a_2C_2) \\ S_1C_{23} & -S_1S_{23} & -C_1 & S_1(a_3S_{23}+a_2S_2) \\ S_{23} & C_{23} & 0 & a_3S_{23}+a_2S_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

A ${}^{0}T_3$ mátrix leírja a 3-as fogókar koordinátarendszerét a 0 jelölésű rendszerben a q1, q2 és q3 belső koordináták alapján. A bal felső almátrix az elfordulást írja le (Euler féle szögek), a negyedik oszlop pedig a manipulátor csúcsának koordinátáit jelöli a nem mozgó rendszerhez viszonyítva.

$$ {}^{0}T_3 = \begin{bmatrix} & & & x \\ & {}^{0}A_3 & & y \\ & & & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

A fogó orientációja:

A fogókar orientációjának leírása a manipulátor nem mozgó koordinátarendszeréhez képest három külső koordináta segítségével leggyakrabban a három Euler féle szögelfordulás segítségével történik.



Ábra 2.14. A fogókar orientációja

Az $O_n x_n y_n z_n$ rendszer Oxyz rendszerhez viszonyított elfordulását az alábbi szögelfordulásokkal írhatjuk le: ψ jelölésű elfordulás a z tengely körül, továbbá θ jelölésű elfordulás az új y tengely körül és ϕ jelölésű elfordulás az új x tengely körül. Ezek a szögelfordulások a következő transzformációs mátrixot adják:

$$
{}^{0}A_{n} = \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}
$$

$$
{}^{0}A_{n} = \begin{bmatrix} \cos\psi\cos\theta & \cos\psi\sin\theta\sin\varphi - \sin\psi\cos\varphi & \cos\psi\sin\theta\cos\varphi + \sin\psi\sin\varphi \\ \sin\psi\cos\theta & \sin\psi\sin\theta\sin\varphi + \cos\psi\cos\varphi & \sin\psi\sin\theta\cos\varphi + \cos\psi\sin\varphi \\ -\sin\theta & \cos\theta\sin\varphi & \cos\theta\cos\varphi \end{bmatrix}
$$

A mátrix egyes elemeinek kiemelésekor a következőt kapjuk:

$$
\begin{aligned}
a_{11} &= \cos\psi\cos\theta \\
a_{21} &= \sin\psi\cos\theta \\
a_{31} &= -\sin\theta \\
a_{12} &= \cos\psi\sin\theta\sin\varphi - \sin\psi\cos\varphi \\
a_{22} &= \sin\psi\sin\theta\sin\varphi + \cos\psi\cos\varphi \\
a_{32} &= \cos\theta\sin\varphi \\
a_{13} &= \cos\psi\sin\theta\cos\varphi + \sin\psi\sin\varphi \\
a_{23} &= \sin\psi\sin\theta\cos\varphi + \cos\psi\sin\varphi \\
a_{33} &= \cos\theta\cos\varphi
\end{aligned}
$$

Amint látjuk, ez egy kilenc egyenletes rendszer három ismeretlennel. A szögek meghatározása a következő módon történik:

$$\psi = arctg\frac{a_{21}}{a_{11}} + k\pi$$

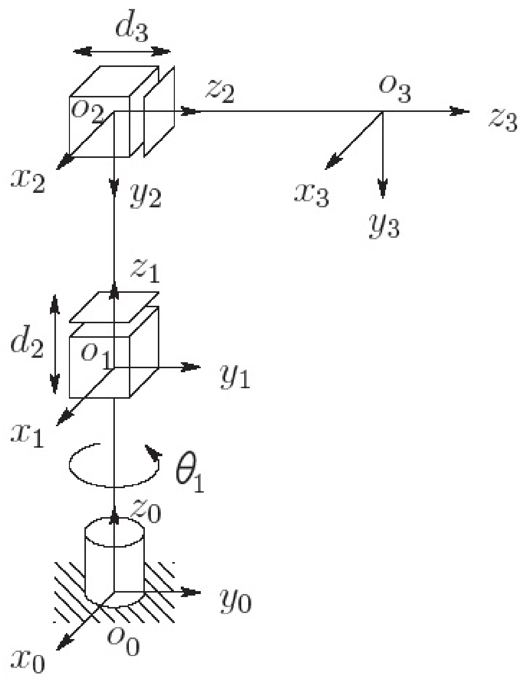
$$\theta = arctg\frac{-a_{31}}{a_{11}\cos\psi + a_{21}\sin\psi} + 2k\pi$$

$$\varphi = arctg\frac{a_{32}}{a_{33}} + 2k\pi$$

Mivel már meghatároztuk a ${}^{0}T_{n}$ mátrixot a megadott belső koordinátákkal, valamint az Euler féle szögeket is, a közvetlen kinematikai probléma teljes mértékben megoldódott.

RTT tipusú robotkonfiguráció

Meghatározni a DH paramétereket és leírni a következő ábrán látható három szabadságfokú manipulátor alap beállításának homogén transzformációs mátrixát:



Ábra 2.15. Három szabadságfokú manipulátor

Megoldás:

A Denavit-Hartenberg féle paraméterek a következő táblában vannak megadva:

link	*ai*	*αi*	*Di*	*qi*
1	0	0	*d1*	*q1*
2	0	-90	*d2*	0
3	0	0	*d3*	0

$$A_1 = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A fogókar koordinátarendszere és a nem mozgó rész közötti homogén transzformációs mátrixot, a mátrixok szorzásával kapjuk meg az alábbi képlet alapján:

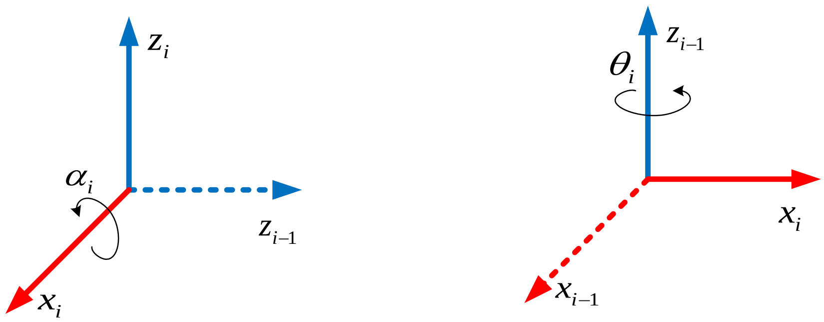
$$T_3^0 = A_1 A_2 A_3$$

Vagyis:

$$T_3^0 = A_1 A_2 A_3 = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & -s_1 & -s_1 d_3 \\ s_1 & 0 & c_1 & c_1 d_3 \\ 0 & -1 & 0 & d_1 + d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

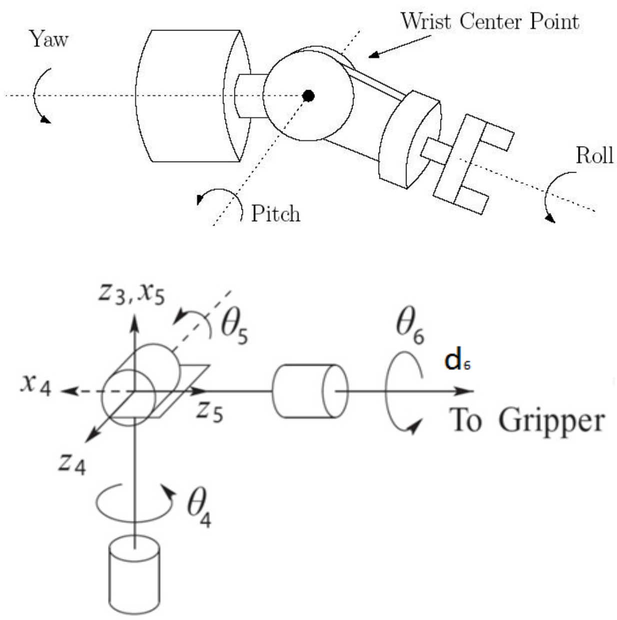
Megjegyzés:

Pozitív irány az alpha és theta szögek esetében



Gömbcsukló modellezése

Meghatározni a DH paramétereket és leírni a következő ábrán látható gömbcsukló homogén transzformációs mátrixát:



Ábra 2.16. *Gömbcsukló*

Megoldás:

A Denavit-Hartenberg féleparaméterek a következő táblában vannak megadva:

link	*ai*	αi	*di*	*qi*
4	0	-90	0	*q4*
5	0	90	0	*q5*
6	0	0	*d6*	*q6*

$$A_4 = \begin{bmatrix} c_4 & 0 & -s_4 & 0 \\ s_4 & 0 & c_4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A_5 = \begin{bmatrix} c_5 & 0 & s_5 & 0 \\ s_5 & 0 & -c_5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A_6 = \begin{bmatrix} c_6 & -s_6 & 0 & 0 \\ s_6 & c_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A fogókar koordinátarendszere és a nem mozgó rész közötti homogén transzformációs mátrixot, a mátrixok szorzásával kapjuk meg az alábbi képlet alapján:

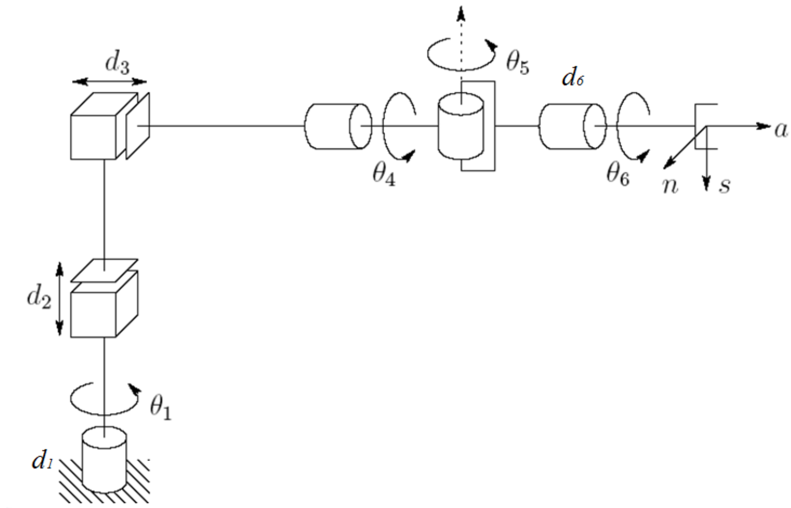
$$T_6^3 = A_4 A_5 A_6$$

Vagyis

$$T_6^3 = A_4 A_5 A_6 = \begin{bmatrix} c_4 c_5 c_6 - s_4 s_6 & -c_4 c_5 s_6 - s_4 c_6 & c_4 s_5 & c_4 s_5 d_6 \\ s_4 c_5 c_6 + c_4 s_6 & -s_4 c_5 s_6 + c_4 c_6 & s_4 s_5 & s_4 s_5 d_6 \\ -s_5 c_6 & s_5 c_6 & c_5 & c_5 d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Hat szabadságfokú robotkonfiguráció

Meghatározni a DH paramétereket és leírni a következő ábrán látható hat szabadságfokú manipulátor alap beállításának homogén transzformációs mátrixát:



Ábra 2.17. *Hat szabadságfokú robot konfiguráció*

Megoldás:

A Denavit-Hartenberg féleparaméterek a következő táblában vannak megadva:

link	ai	αi	*di*	*qi*
1	0	0	*d1*	*q1*
2	0	-90	*d2*	0
3	0	0	*d3*	0
4	0	-90	0	*q4*
5	0	90	0	*q5*
6	0	0	*d6*	*q6*

$$A_1 = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_4=\begin{bmatrix} c_4 & 0 & -s_4 & 0 \\ s_4 & 0 & c_4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, A_5=\begin{bmatrix} c_5 & 0 & -s_5 & 0 \\ s_5 & 0 & c_5 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, A_6=\begin{bmatrix} c_6 & -s_6 & 0 & 0 \\ s_6 & c_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A fogókar koordinátarendszere és a nem mozgó rész közötti homogén transzformációs mátrixot, a mátrixok szorzásával kapjuk meg az alábbi képlet alapján:

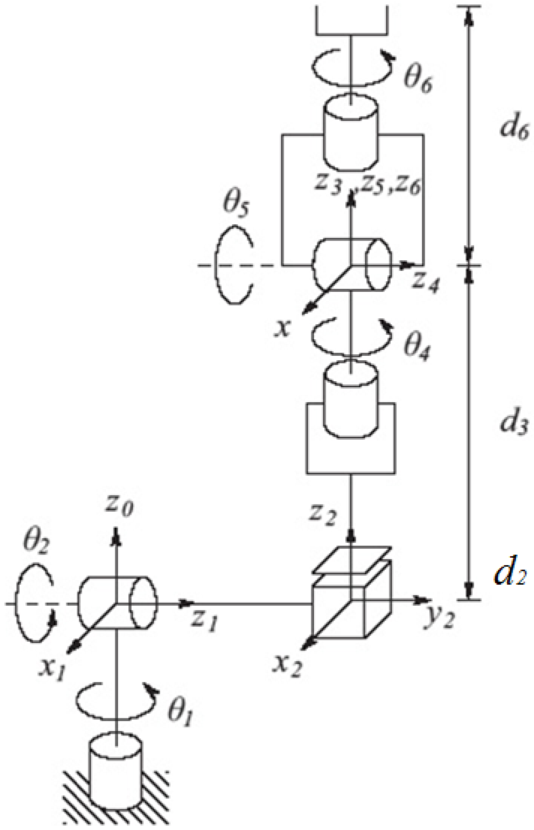
$$T_6^0=T_3^0T_6^3=\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & d_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & d_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Vagyis:

$$\begin{aligned}
r_{11} &= c_1c_4c_5c_6 - c_1s_4s_6 + s_1s_5c_6 \\
r_{21} &= s_1c_4c_5c_6 - s_1s_4s_6 - c_1s_5c_6 \\
r_{31} &= -s_4c_5c_6 - c_4s_6 \\
r_{12} &= -c_1c_4c_5s_6 - c_1s_4c_6 - s_1s_5c_6 \\
r_{22} &= -s_1c_4c_5s_6 - s_1s_4s_6 + c_1s_5c_6 \\
r_{32} &= s_4c_5c_6 - c_4c_6 \\
r_{13} &= c_1c_4s_5 - s_1c_5 \\
r_{23} &= s_1c_4s_5 + c_1c_5 \\
r_{33} &= -s_4s_5 \\
d_x &= c_1c_4s_5d_6 - s_1c_5d_6 - s_1d_3 \\
d_y &= s_1c_4s_5d_6 + c_1c_5d_6 + c_1d_3 \\
d_z &= -s_4s_5d_6 + d_1 + d_2
\end{aligned}$$

Stanford arm tipusú robotkonfiguráció

Meghatározni a DH paramétereket és leírni a következő ábrán látható Stanford manipulátor alap beállításának homogén transzformációs mátrixát:



Ábra 2.18. *Stanford manipulátor*

Megoldás:

A Denavit-Hartenberg féleparaméterek a következő táblában vannak megadva:

link	ai	αi	*di*	*qi*
1	0	-90	0	*q1*
2	0	90	*d2*	*q2*
3	0	0	*d3*	0
4	0	-90	0	*q4*
5	0	90	0	*q5*
6	0	0	*d6*	*q6*

$$A_1 = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & -s_1 & 0 \\ s_1 & 0 & c_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} c_2 & 0 & s_2 & 0 \\ s_2 & 0 & -c_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} c_4 & 0 & -s_4 & 0 \\ s_4 & 0 & c_4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, A_5 = \begin{bmatrix} c_5 & 0 & s_5 & 0 \\ s_5 & 0 & -c_5 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, A_6 = \begin{bmatrix} c_6 & -s_6 & 0 & 0 \\ s_6 & c_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A fogókar koordinátarendszere és a nem mozgó rész közötti homogén transzformációs mátrixot, a mátrixok szorzásával kapjuk meg az alábbi képlet alapján:

$$T_6^0 = A_1 \cdots A_6 = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & d_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & d_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

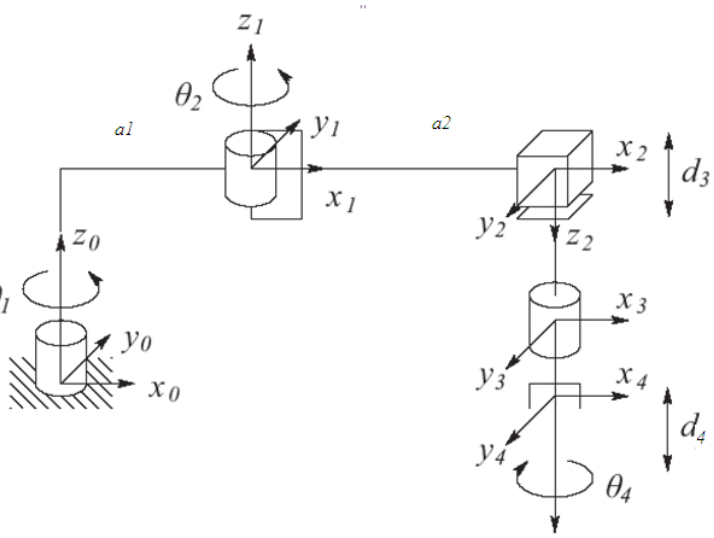
Vagyis:

$$\begin{aligned}
r_{11} &= c_1\left[c_2\left(c_4c_5c_6 - s_4s_6\right) - s_2s_5c_6\right] - d_2\left(s_4c_5c_6 + c_4s_6\right) \\
r_{21} &= s_1\left[c_2\left(c_4c_5c_6 - s_4s_6\right) - s_2s_5c_6\right] + c_1\left(s_4c_5c_6 + c_4s_6\right) \\
r_{31} &= -s_2\left(c_4c_5c_6 - s_4s_6\right) - c_2s_5c_6 \\
r_{12} &= c_1\left[-c_2\left(c_4c_5s_6 + s_4c_6\right) + s_2s_5s_6\right] - s_1\left(-s_4c_5s_6 + c_4c_6\right) \\
r_{22} &= -s_1\left[-c_2\left(c_4c_5s_6 - s_4c_6\right) - s_2s_5s_6\right] + c_1\left(-s_4c_5s_6 + c_4s_6\right) \\
r_{32} &= s_2\left(c_4c_5s_6 + s_4c_6\right) + c_2s_5s_6 \\
r_{13} &= c_1\left(c_2c_4s_5 + s_2c_5\right) - s_1s_4s_5 \\
r_{23} &= s_1\left(c_2c_4s_5 + s_2c_5\right) + c_1s_4s_5 \\
r_{33} &= -s_2c_4s_5 + c_2c_5 \\
d_x &= c_1s_2d_3 - s_1d_2 + d_6\left(c_1c_2c_4s_5 + c_1c_5s_2 - s_1s_4s_5\right) \\
d_y &= s_1s_2d_3 + c_1d_2 + d_6\left(c_1s_4s_5 + c_2c_4s_1s_5 + c_5s_1s_2\right) \\
d_z &= c_2d_3 + d_6\left(c_2c_5 - c_4s_2s_5\right)
\end{aligned}$$

SCARA tipusú robotkonfiguráció

Meghatározni a négy szabadságfokú SCARA (Selective Compliant Assembly Robot Arm) manipulátor DH paramétereit és a robotkar alap koordinátarendszer transzformációs mátrixát.

Ábra 2.19. Fanuc Scara Robot



Ábra 2.20. *Lokális koordinátarendszeek*

Megoldás:

A Denavit-Hartenberg féleparaméterek a következő táblában vannak megadva:

link	a_i	α_i	d_i	q_i	$cos\alpha$	$sin\alpha$
1	a_1	0	0	q_1	*1*	*0*
2	a_2	0	0	q_2	*1*	*0*
3	0	180˚	d_3	0	*-1*	0
4	0	0	d_4	q_4	*1*	*0*

Az egyes szegmensek közötti homogén transzformációs mátrixok a következők:

$$A_1 = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & a_1c_1 \\ s_1 & c_1 & 0 & a_1s_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} c_2 & s_2 & 0 & a_2c_2 \\ s_2 & -c_2 & 0 & a_2s_2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} c_4 & -s_4 & 0 & 0 \\ s_4 & c_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A fogókar koordinátarendszere és a nem mozgó rész közötti homogén transzformációs mátrixot, a mátrixok szorzásával (utolsótól az elsőig) kapjuk meg az alábbi képlet alapján.

$$T_4^0 = A_1 \cdot (A_2 \cdot (A_3 \cdot A_4))$$

$$T_4^0 = \begin{bmatrix} c_{12}c_4 + s_{12}s_4 & -c_{12}s_4 + s_{12}c_4 & 0 & a_1c_1 + a_2c_{12} \\ s_{12}c_4 - c_{12}s_4 & -s_{12}s_4 - c_{12}c_4 & 0 & a_1s_1 + a_2s_{12} \\ 0 & 0 & -1 & -d_3 - d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$x = a_1c_1 + a_2c_{12}$

$y = a_1s_1 + a_2s_{12}$

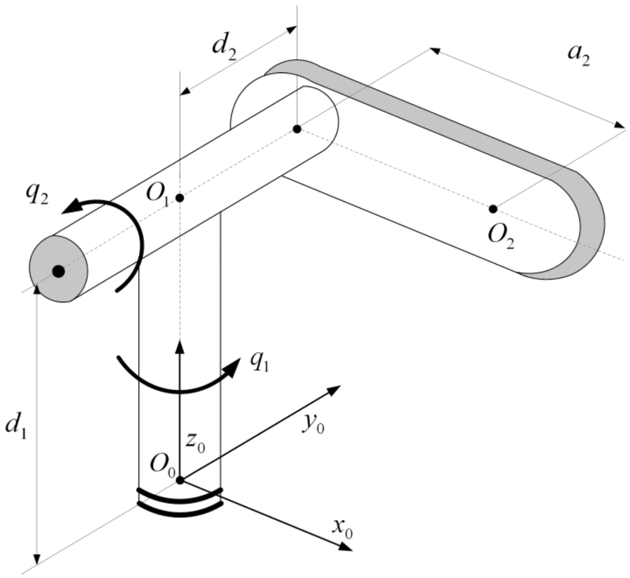
$z = -d_3 - d_4$

RR tipusú robotkonfiguráció

Az ábrán látható egy alap beállítású manipulációs robot. Meghatározni a DH paramétereket, és leírni a képen látható PUMA manipulátor alapbeállításához tartozó homogén transzformációs mátrixot:

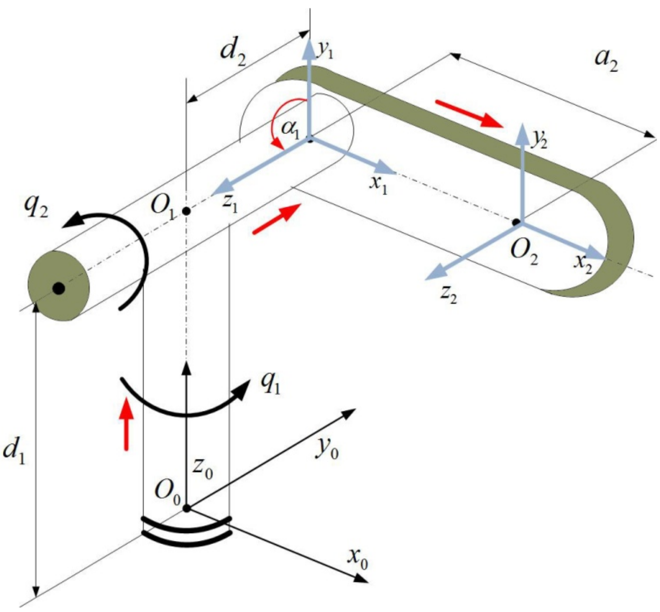
d1=**0.5m** *q1*=3**0˚**

d2=**0.2m** *a2*=**0.6m** *q2*=**60˚**



Ábra 2.21. *Puma RR*

Megoldás:



Ábra 2.22. *Lokális koordinátarendszeek*

link	ai	αi	di	qi
1	*0*	90˚	*d1*	*q1*
2	*a2*	0	*-d2*	*q2*

Most alakítsuk ki a manipulátor szomszédos szegmensei közötti homogén transzformációs mátrixokat. A rotációs szegmensek transzformációs mátrixának általános alakját figyelembe véve és ismerve a táblázat paramétereit, a következőt írhatjuk fel:

$$
{}^{0}D_1 = \begin{bmatrix} \cos q_1 & 0 & \sin q_1 & 0 \\ \sin q_1 & 0 & -\cos q_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},
$$

$$
{}^{1}D_2 = \begin{bmatrix} \cos q_2 & -\sin q_2 & 0 & a_2 \cos q_2 \\ \sin q_2 & \cos q_2 & 0 & a_2 \sin q_2 \\ 0 & 0 & 1 & -d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},
$$

A fogókar koordinátarendszere és a nem mozgó rész közötti homogén transzformációs mátrixot, a mátrixok szorzásával kapjuk meg. Ezt a szorzást az utolsó szegmenstől indulva az elsővel befejezőleg hajtjuk végre, a következő képlet alapján:

$$
{}^{0}D_2 = {}^{0}D_1 * {}^{1}D_2
$$

Így a következő kifejezést kapjuk:

$$
{}^{0}D_2 = \begin{bmatrix} \cos q_1 & 0 & \sin q_1 & 0 \\ \sin q_1 & 0 & -\cos q_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos q_2 & -\sin q_2 & 0 & a_2 \cos q_2 \\ \sin q_2 & \cos q_2 & 0 & a_2 \sin q_2 \\ 0 & 0 & 1 & -d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

Ahol a következő jelöléseket vezetjük be:

$$
{}^{0}D_2 = \begin{bmatrix} \cos q_1 \cos q_2 & -\sin q_2 \cos q_1 & \sin q_1 & a_2 \cos q_1 \cos q_2 - d_2 \sin q_1 \\ \sin q_1 \cos q_2 & -\sin q_1 \sin q_2 & -\cos q_1 & a_2 \sin q_1 \cos q_2 + d_2 \cos q_1 \\ \sin q_2 & \cos q_2 & 0 & a_2 \sin q_2 + d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},
$$

Miután megkaptuk a ${}^{0}D_2$ mátrix numerikus értékeit, lehetőségünk nyílik meghatározni a 3 külső koordinátát, melyek a fogókar orientációját írják le.

$$
{}^{0}D_2 = \begin{bmatrix} & {}^{0}A_2 & & x \\ & & & y \\ & & & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$X_{02} = a_2 \cos q_1 \cos q_2 - d_2 \sin q_1$$

$$Y_{02} = a_2 \sin q_1 \cos q_2 + d_2 \cos q_1$$

$$Z_{02} = a_2 \sin q_2 + d_1$$

A kapott kifejezésekbe behelyettesítjük a következő értékeket:

$$X_{02} = 0.6 \cdot (\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}) - 0.2 \frac{1}{2} = 0.1598m$$

$$Y_{02} = 0.6 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + 0.2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.3232m$$

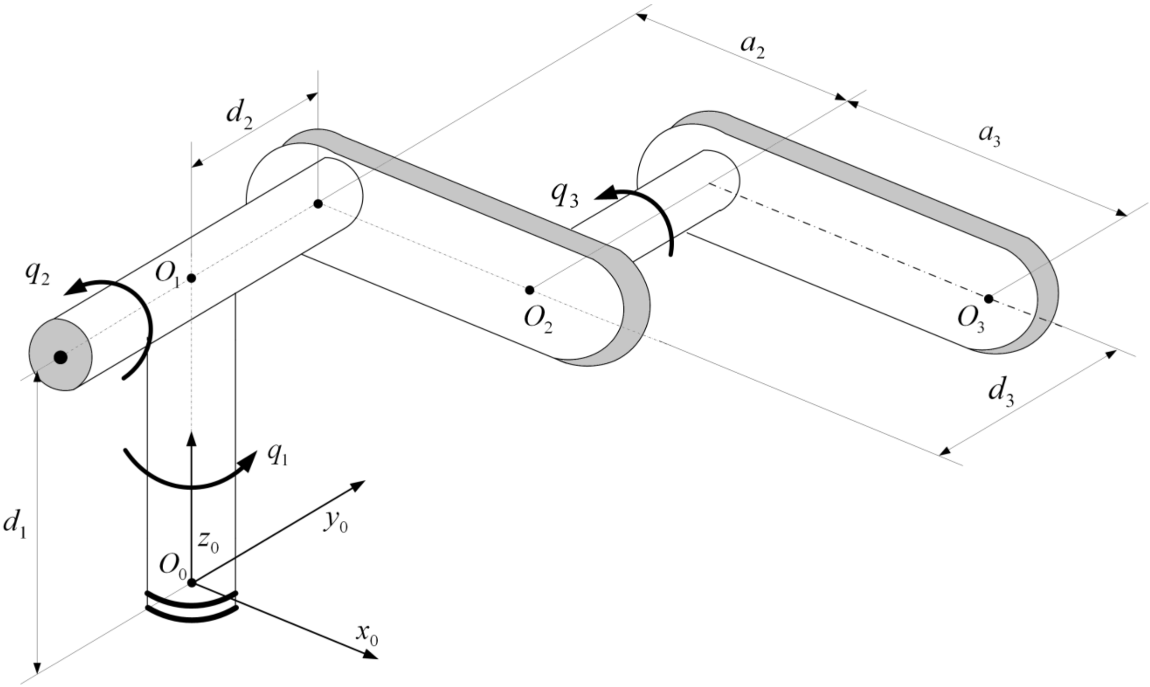
$$Z_{02} = 0.6 \frac{\sqrt{3}}{2} + 0.5 = 1.0196m$$

Miután meghatároztuk ezeket a koordinátákat is, a közvetlen kinematikai probléma teljes mértékben megoldottnak tekinthető.

RRR tipusú PUMA robotkonfiguráció

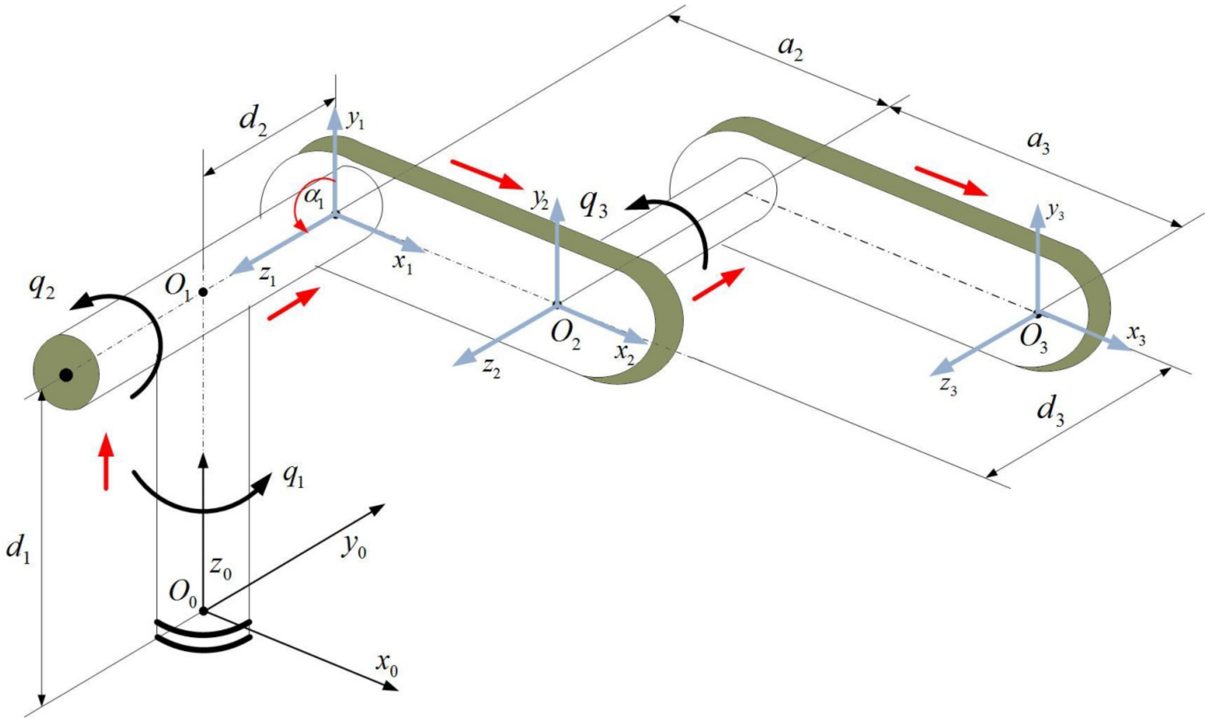
Meghatározni a DH paramétereket, és leírni a képen látható PUMA manipulátor alapbeállításához tartozó homogén transzformációs mátrixot:

d1=**0.5m**		*q1*=**0˚**
d2=**0.2m**	*a2*=**0.6m**	*q2*=**60˚**
d3=**0.2m**	*a3*=**0.6m**	*q3*=-**30˚**



Ábra 2.23. *Puma RRR*

Megoldás:



Ábra 2.24. *Lokális koordinátarendszeek*

link	ai	αi	*di*	*qi*
1	*0*	90˚	*d1*	*q1*
2	*a2*	0	*-d2*	*q2*
3	*a3*	0	*-d3*	*q3*

Most alakítsuk ki a manipulátor szomszédos szegmensei közötti homogén transzformációs mátrixokat. A rotációs szegmensek transzformációs mátrixának általános alakját figyelembe véve és ismerve a táblázat paramétereit, a következőt írhatjuk fel:

$$^0D_1 = \begin{bmatrix} \cos q_1 & 0 & \sin q_1 & 0 \\ \sin q_1 & 0 & -\cos q_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$^1D_2 = \begin{bmatrix} \cos q_2 & -\sin q_2 & 0 & a_2 \cos q_2 \\ \sin q_2 & \cos q_2 & 0 & a_2 \sin q_2 \\ 0 & 0 & 1 & -d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$
{}^{2}D_3 = \begin{bmatrix} \cos q_3 & -\sin q_3 & 0 & a_3 \cos q_3 \\ \sin q_3 & \cos q_3 & 0 & a_3 \sin q_3 \\ 0 & 0 & 1 & -d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},
$$

A fogókar koordinátarendszere és a nem mozgó rész közötti homogén transzformációs mátrixot, a mátrixok szorzásával kapjuk meg. Ezt a szorzást az utolsó szegmenstől indulva az elsővel befejezőleg hajtjuk végre, a következő képlet alapján:

$$
{}^{0}D_3 = {}^{0}D_1 * ({}^{1}D_2 * {}^{2}D_3)
$$

Így a következő kifejezést kapjuk meg:

$$
{}^{1}D_3 = \begin{bmatrix} \cos q_2 \cos q_3 - \sin q_2 \sin q_3 & -\cos q_2 \sin q_3 - \sin q_2 \cos q_3 & 0 & a_3(\cos q_2 \cos q_3 - \sin q_2 \sin q_3) + a_2 \cos q_2 \\ \sin q_2 \cos q_3 + \cos q_2 \sin q_3 & -\sin q_2 \sin q_3 + \cos q_2 \cos q_3 & 0 & a_3(\sin q_2 \cos q_3 + \cos q_2 \sin q_3) + a_2 \sin q_2 \\ 0 & 0 & 1 & -d_3 - d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},
$$

Ahol a következő jelöléseket vezetjük be:

$$
c_{23} = \cos q_2 \cos q_3 - \sin q_2 \sin q_3
$$

$$
s_{23} = \sin q_2 \cos q_3 + \cos q_2 \sin q_3
$$

$$
{}^{1}D_3 = \begin{bmatrix} c_{23} & -s_{23} & 0 & a_2 c_2 + a_3 c_{23} \\ s_{23} & -c_{23} & 0 & a_2 s_2 + a_3 s_{23} \\ 0 & 0 & 1 & -(d_2 + d_3) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},
$$

$$
{}^{0}D_3 = \begin{bmatrix} c_1 c_{23} & -c_1 s_{23} & s_1 & c_1(a_2 c_2 + a_3 c_{23}) - s_1(d_2 + d_3) \\ s_1 s_{23} & s_1 c_{23} & -c_1 & s_1(a_2 s_2 + a_3 s_{23}) + c_1(d_2 + d_3) \\ s_{23} & c_{23} & 1 & a_2 s_2 + a_3 s_{23} + d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},
$$

Miután megkaptuk a ${}^{0}D_3$ mátrix numerikus értékeit, lehetőségünk nyílik meghatározni a 3 külső koordinátát, melyek a fogókar orientációját írják le.

$$
{}^{0}D_3 = \left[\begin{array}{ccc|c} & & & x \\ & {}^{0}A_3 & & y \\ & & & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]
$$

$$
X_{03} = c_1(a_2 c_2 + a_3 c_{23}) - s_1(d_2 + d_3)
$$

$$Y_{03} = s_1(a_2 s_2 + a_3 s_{23}) + c_1(d_2 + d_3)$$

$$Z_{03} = a_2 s_2 + a_3 s_{23} + d_1$$

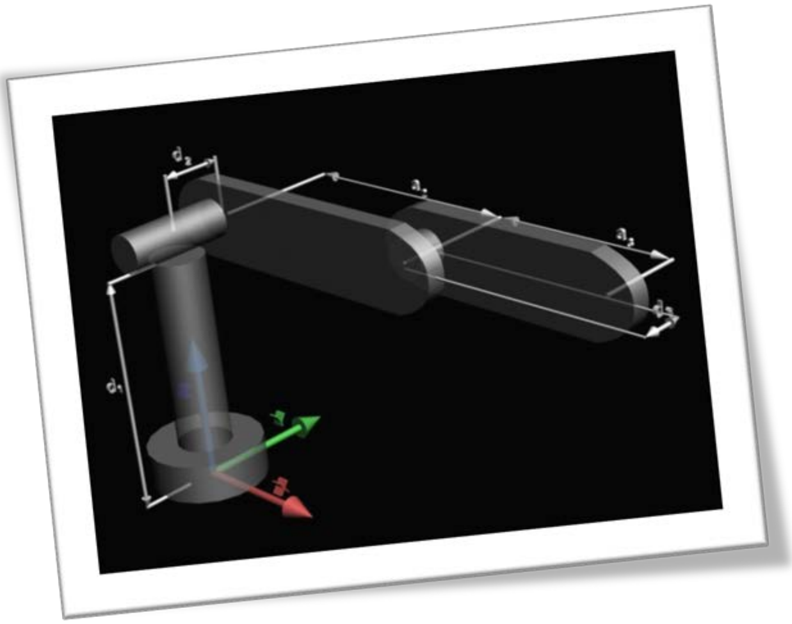
A kapott kifejezésekbe behelyettesítjük a következő értékeket:

$$X_{03} = 1(0.6 \cdot \frac{1}{2} + 0.6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}) - 0(0.5 + 0.2) = 0.8196m$$

$$Y_{03} = 0 + 1(0.2 + 0.2) = 0.4m$$

$$Z_{03} = 0.5 + 0.6\frac{\sqrt{3}}{2} + 0.6\frac{1}{2} = 1.3196\,m$$

Miután meghatároztuk ezeket a koordinátákat is, a közvetlen kinematikai probléma teljes mértékben megoldottnak tekinthető.



3. Irodalom

[1] Inteligentni roboti i sistemi, Gyula Mester, Viša tehnička škola Subotica, 2002

[2] Robotok irányítása, Lantos Béla, Akadémiai kiadó, Budapest, 1991

[3] Osnovi robotike - Upravljanje manipulacionim robotima, M.Vukobratović, D.Stokić, Tehnička knjiga, Beograd, 1988

[4] Upravljanje manipulacionim robotima, M.Vukobratović, D.Stokić, Tehnička knjiga, Beograd, 1988

[5] Primenjena dinamika manipulacionih robota, Miomir Vukobratović, Tehnička knjiga, Beograd, 1986

[6] A Robotics Toolbox for Matlab Release 8, Peter I. Corke, 2008

[7] Stoyan Gisbert: MATLAB. Typotex, 2005.

[8] Uvod u robotiku, M.Vukobratović, Mihajlo Pupin, Beograd, 1986

[9] Uvod u MATLAB 7 sa primerima, *Amos Gilat,* Mikro knjiga, 2005

[10] Robotika, Mester Gyula, pp. 1-150, ISBN 978-963-279-515-7, Typotex Kiadó, Budapest, 2011.

[11] Intelligens robotok és rendszerek, Gyula Mester, SZMF, Szabadka, 2000

[12] Számítógépes Modellezés és Szimuláció 1, Simon János, Szegedi Tudományegyetem - Mérnöki Kar, 2018.